

数学物理方法

2025-1

PHY 211

任杰

周一 3-4节 10:10-11:50

周三 7-8节 16:30-18:10

* 微信课程群

* email: renjie7@mail.sysu.edu.cn

林琮桂 <<数学物理方法>> — 教材

北大吴崇试 << - - - - >>

梁昆淼 << - - - - >>

<http://heun.xyz>

作业 周一上课前交

助教

为什么要学习这门课？

升级教学的武器库

概念是怎么来的

为什么要学习复变函数？

"The shortest path between two truths
in the real domain passes through the complex domain."
- J. Hadamard

域 domain, field

先直译. 比喻

虽然要解决的问题是实数范围内的问题, 但是最简捷的
途径是用复数作为工具。

—— $\mathbb{R}$ $f(x)$

“竖线”

$\mathbb{C}$

$f(z)$

“降维打击”

* 复数的特殊地位

$$x-1=0$$

$\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ 避免误解.

$$x+1=0$$

$\mathbb{Z}$

$$2x+3=0$$

$\mathbb{Q}$

$$x^2-2=0$$

$\mathbb{R}$

$$x^2+1=0$$

$\mathbb{C}$

$$x^3+x+1=0$$

?

是不是还要扩充

从小学开始 ---

代数基本定理: n 次代数方程

问: 推导 3 次代数方程的求根公式.)

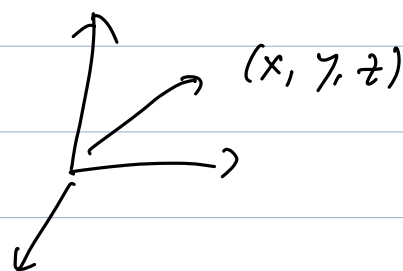
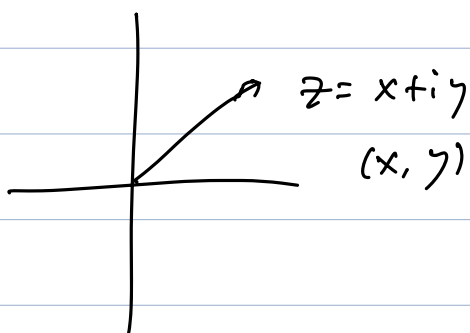
~1545 Italy

↓
存在根号

$x^2+1=0$ 让它有解

- 不用再扩充
- 不可能再扩充

八
主、四元数



每扩充一步产生伟大数学家.

大家有没有想过?

三元数

欧拉、高斯

3维空间中的点

规则 $\rightarrow$ 能作四则运算的数

四元数 放弃交换律

如何引进的复数 $x^2 + 1 = 0$

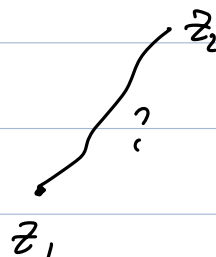
三次代数方程求根公式

思路

推广实变函数

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$$



实变函数没有的性质

不太好 $\rightarrow$ 提出条件变好

Chap. 1, 2, 3, 4

积分、级数

应用

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

按讲义的顺序 $\downarrow$

Ch 1 复变函数与解析函数

§1 复数

上升一个高度去理解

§1.1 复数的定义

$$z = x + iy \quad \text{代数式} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

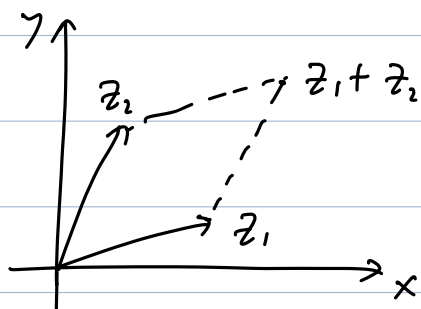
$$\begin{array}{ccc} \text{Re } z & & \text{Im } z \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\bar{z}, z^* = x - iy$$

§1.2 复数的四则运算

trivial?

勾股定理



$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

四则运算 封闭性、交换律、结合律、分配律

$$\text{乘、除} \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \stackrel{?}{=} (\cdot, \cdot)$$

理所当然吗?

$$\text{问: } w = x + iy + jz$$

为什么不行?

哈密顿

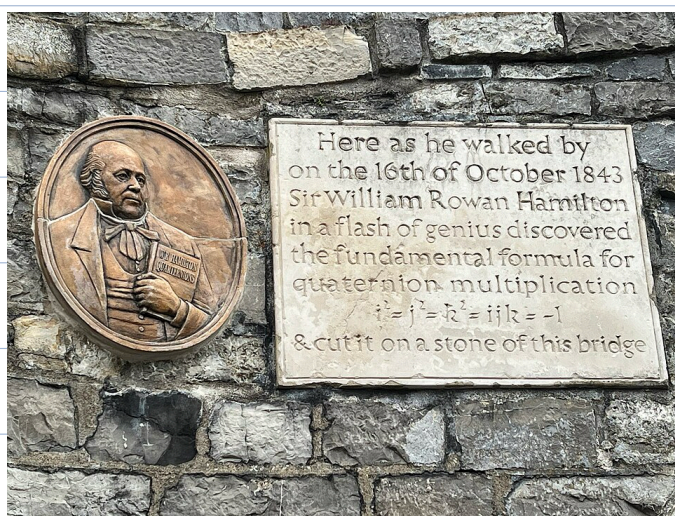
$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

四元数、八元数

$$AB \neq BA \quad \text{例: 矩阵}$$

$$(AB)C \neq A(BC)$$

思: 什么不满足结合律



quaternion

$$q = a + bi + cj + dk$$

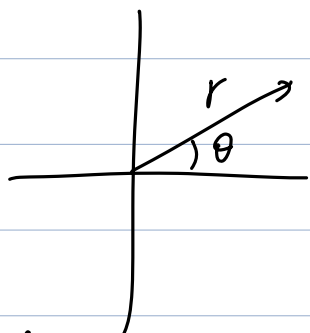
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k = -ji$$

$$q^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a - bi - cj - dk)$$

§1.3 复数的各种表示法

代数表示. 几何表示



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

三角表示

利用极坐标
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

指数表示

$$z = r e^{i\theta}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \dots$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \dots$$

r 模 $|z|$

θ 辐角 $\text{Arg} z$ 不唯一 -

$$\theta, \theta + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

可限制 $0 \leq \theta < 2\pi$ 或 $-\pi < \theta \leq \pi$

所得的单值分支称为主值分支, 记作 $\arg z$

§1.4 乘方与开方

$$z^n = (re^{i\theta}) = r^n e^{in\theta}$$

$\sqrt[n]{z-a}$ 的多值

$$z-a = \rho e^{i\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z-a} = \sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\varphi+2k\pi)/n} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

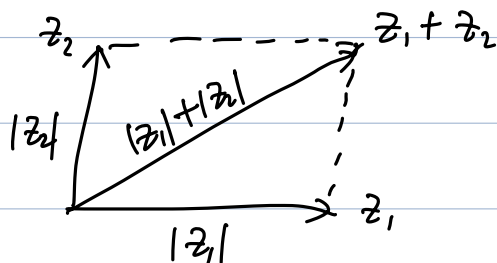
$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

- (1) k 取其它 n 时, 所得结果与以上重复. 如 $k=n$ 与 $k=0$ 重复
(2) 根式函数的多值性源于宗量 $(z-a)$ 的辐角多值性.

§1.5 三角不等式

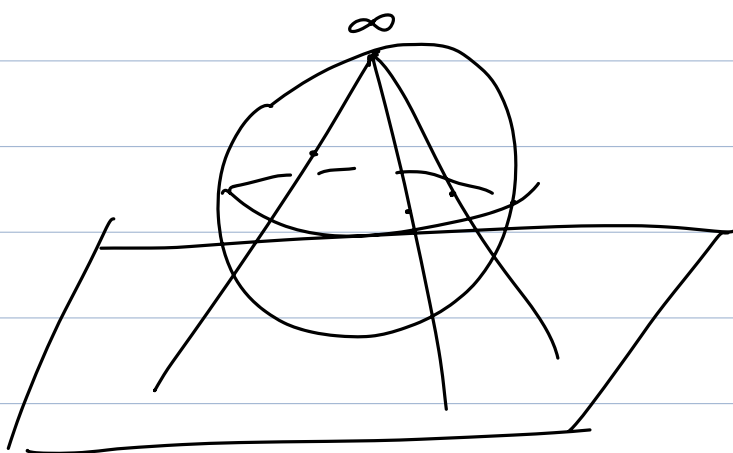
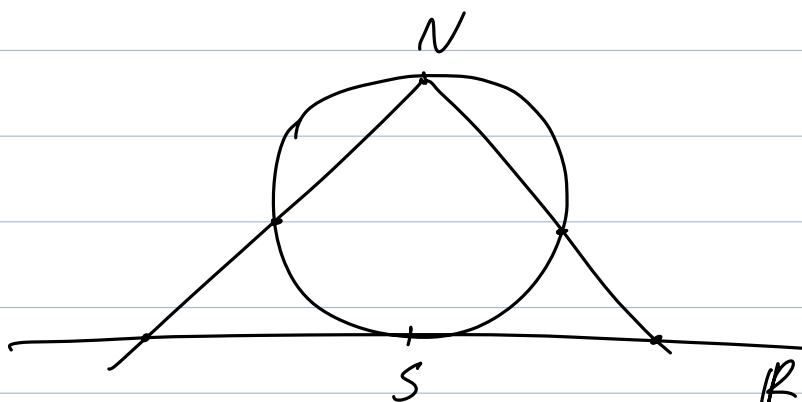
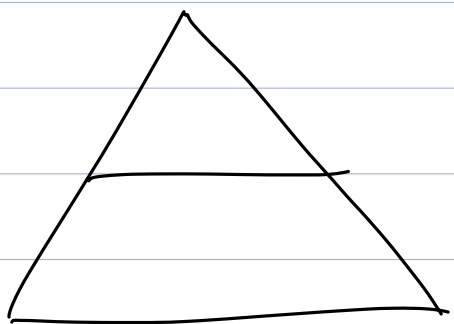
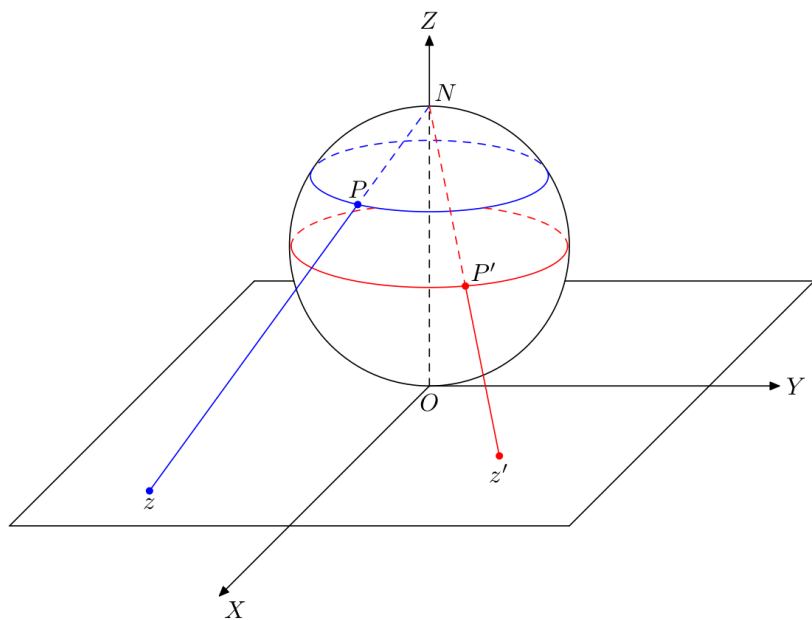
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$



思: $\sqrt{-1} = ?$

§1.6 复球面与无穷远点



∞ 模为无穷大, 辐角无意义

0 - - - - -

复球面: 把无限大的复平面尽收眼底

扩充复平面

§2 复变函数

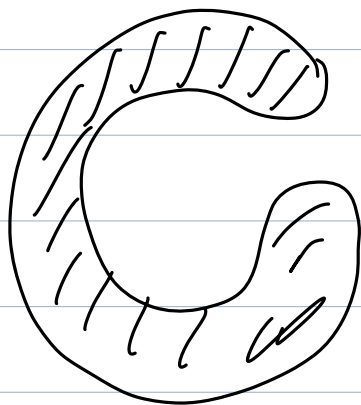
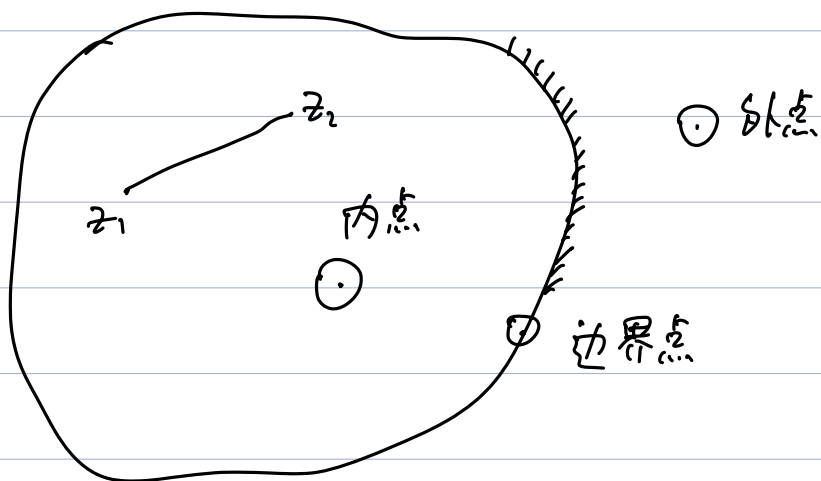
§2.1 复平面上的点集

类比

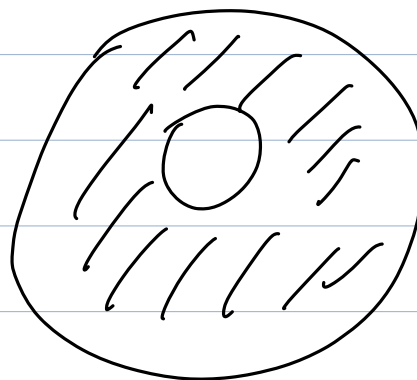
实 $\text{---} (\text{---}) \text{---} [\text{---}] \text{---}$ 定义域
 $f(x)$

你是概念的发明者

复: $w = f(z) \quad z \in E$
区域



单连通



复连通

由于复变函数总是定义在点集上，所以下面介绍关于点集的几个基本概念.

1. **邻域** (neighborhood): 由不等式 $|z - z_0| < \varepsilon$ 所确定的点集, 称为 z_0 的 ε 邻域, 记作 $N(z_0, \varepsilon)$, 即以 z_0 为中心, ε 为半径的开圆 (不包含圆周).

注 ① 易见这一定义是一维空间 (实轴) 的邻域概念的推广, 后者是一个开区间. ② 我们当然也可以等价地将邻域定义为以 z_0 为中心的某一正方形的内部, 不过以上的定义是方便的. ③ 在以上的定义中并没有对 ε 的大小作任何规定, 因此, 邻域可以很大.

2. **内点** (inner point): 设 E 为点集, $z_0 \in E$, 若存在 $\varepsilon > 0$, 使 $N(z_0, \varepsilon) \subset E$, 则 z_0 称为 E 的内点.

粗略地说, 内点就是该点及其周围全属于点集, 所以这一定义是相当直观的. 易见一个邻域内的任意点均为该邻域的内点.

3. **开集** (open set): 若点集 E 的点皆为内点, 则称 E 为开集.

显然, 邻域就是开集.

4. **边界点** (boundary point): 若点 z_0 的任一邻域内既有属于 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则 z_0 称为 E 的边界点.

边界 (boundary): E 的全部边界点所组成的点集称为 E 的边界, 记作 ∂E .

注:

5. **区域** (domain): 非空点集 D 若满足以下两个条件, 则称为区域: 一、 D 是开集; 二、 D 是连通的, 即 D 中的任意两点均可用全属于 D 的折线连接.

注 ① 区域是一种特殊的点集, 是复变函数论中最重要的几何概念. ② 显然, 邻域或开圆就是区域. ③ 两个不相交的开圆的并集仍是开集, 但不是区域, 哪怕两个圆的圆周相切. 在相切的情况下, 两个圆加上切点仍不是区域. 因为切点是边界点, 所以加上边界点以后虽然连通, 但不再是开集.

6. **闭域** (closed domain): 区域 D 加上其边界 ∂D 称为闭域, 记作 $\bar{D}$: $\bar{D} = D + \partial D$.

注 ① 区域都是开的, 不包括边界. ② 以后我们提到圆或环时总不包括边界, 若包括边界, 则称为闭圆或闭环.

7. **单通与复通区域**: 在区域 D 内画任意简单闭曲线, 若其内部全含于 D , 则 D 称为单通 (simply connected) 区域, 否则称为复通 (multiply connected) 区域.

缩成一个点

参见之前的图



画图

一条代表路径



多条代表路径

§1.2 复变函数

复变函数 (function of a complex variable) 就是以复数为自变量的函数, 其函数值通常也是复数. 当然, 它不必在整个复平面上有定义. 严格的定义如下:

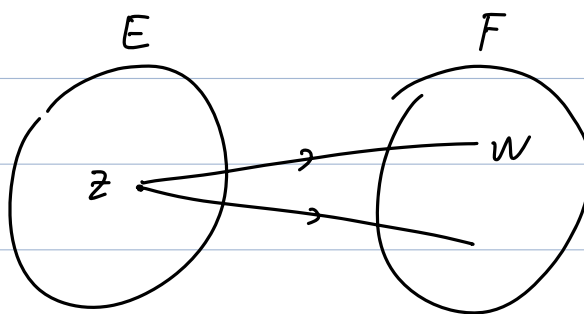
设 E 是复平面上的点集, $\forall z \in E$, 若按规则 f 有唯一的复数 w 与之对应, 则称在点集 E 上确定了单值函数 $w = f(z)$, 若对 $z \in E$ 有多个 (可以无穷多) 复数 w 与之对应, 则称在点集 E 上确定了多值函数 $w = f(z)$. E 称为函数 $w = f(z)$ 的定义域, $F = \{f(z) | z \in E\}$ 称为其值域.

记 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (13)$$

所以一个复变函数等价于两个二元实变函数, 它给出了 z 平面到 w 平面的映射 (map) 或变换 (transform).

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & w \\ \parallel & & \parallel \\ x+iy & & u+iv \end{array}$$



* 复变函数的极限

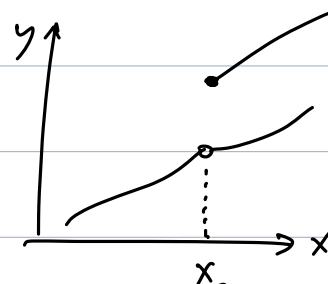
复变函数 $w = f(z)$ 定义在点集 E 上, z_0 是 E 的聚点 (比如内点, 参看下面的注解), 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - w_0| < \varepsilon$, 则称 w_0 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0.$$

聚点: 在 z_0 的任意小邻域内均有属于 E 而异与 z_0 的点

与实变函数对比: $x \rightarrow x_0$

$z \rightarrow z_0$



取点 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right), \quad a_0 = 1$

$$a_1 = 1.5$$

$$a_2 = 1.41667$$

$$a_3 = 1.41422$$

$\vdots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

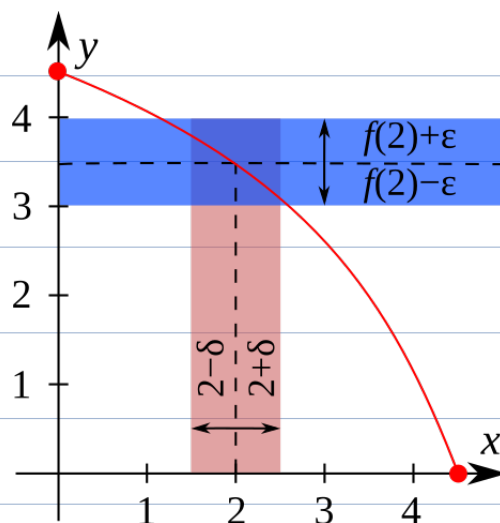
Recall:

实变函数的连续性

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t.}$$

$$\text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



* 复变函数的连续性

复变函数 $w = f(z)$ 定义在点集 E 上, $z_0 \in E$, 如果

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

注 ① 易见连续就是不仅要有极限, 而且该极限要等于该点处的函数值. ② 显然, $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续. ③ z_0 应该是 E 的聚点, 否则极限没有意义, 也就谈不上连续与否.

若 $f(z)$ 在点集 E 上的各点连续, 则称 $f(z)$ 在点集 E 上连续.

§1.3 解析函数

提出条件 $\rightarrow$ 让函数变好

* 复变函数的导数

复变函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 上, $z_0 \in D$, 如果极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

存在且有限, 则称 $w = f(z)$ 在 z_0 处可导或可微 (differentiable), 且该极限称为 $w = f(z)$ 在 z_0 处的导数 (derivative) 或微商, 记作

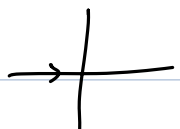
$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (14)$$

§1.1 $f(z) = z^n$

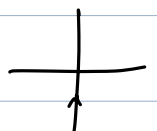
§1.2 $f(z) = \bar{z}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z}$$

$$z = x + iy$$

①  $\Delta z = \Delta x$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

②  $\Delta z = i \Delta y$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{-i \Delta y}{i \Delta y} = -1$$

* 解析函数

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导, 则称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数 (analytic function, 亦称全纯函数, holomorphic function), 或称 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

例 3 $f(z) = z^n$ ($n = 1, 2, \dots$) 在整个复平面上解析.

注 ① 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析与可导是一回事. ② 有时候我们说函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析, 这指的是 $f(z)$ 在 z_0 的某一邻域内可导, 而不仅仅是在 z_0 可导. 所以函数在一点解析与可导不是一回事. ③ 函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 内解析, 指的是在某区域 D' 内解析, 而 $D' \supset \bar{D}$.

* 奇点

若函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不解析, 但在 z_0 的任一邻域内都有 $f(z)$ 的解析点, 则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点 (singular point).

例 4 $z = 0$ 是 $f(z) = 1/z$ 的奇点.

注 ① 函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不解析, 可能是在该点没有定义, 也可能是有定义但不连续, 也可能是连续但不可导, 还可能是可导但仍不解析 (见例 6), 等等. ② 按上述定义, $f(z)$ 在点 z_0 不解析, 并不说明 z_0 就是奇点. 比如函数 $f(z) = \bar{z}$ 处处不可导, 但所有的点都不是奇点.

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad z = 0$$

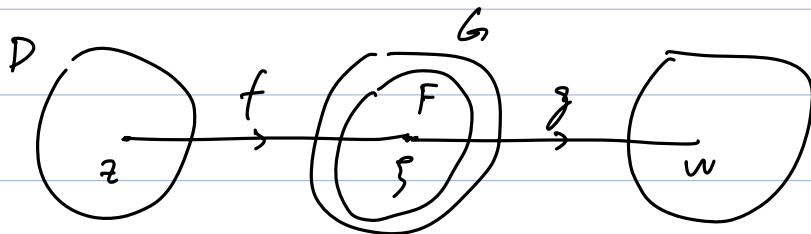
$$f(z) = \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

$f(z) = |z|^2$ 在 $z = 0$ 可导, 但除 $z = 0$ 都不可导 $\Rightarrow$ 处处不解析

* 求导法则

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$$

$$\frac{dg[f(z)]}{dz} = \frac{dg(\xi)}{d\xi} \frac{df(z)}{dz} \quad \xi = f(z)$$



例 5 多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($n \in \mathbb{N}$). 显然, 其各项均在复平面上解析, 故 $P_n(z)$ 在整个复平面上解析. 由求导法则可得

$$P_n'(z) = \sum_{k=0}^n (a_k z^k)' = \sum_{k=0}^n a_k (z^k)' = \sum_{k=0}^n k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} z^k.$$

* Cauchy-Riemann 条件 (CR条件)

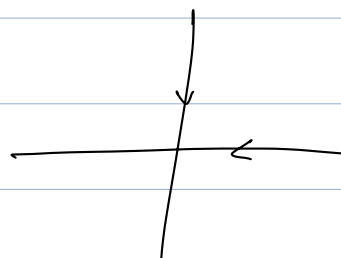
导数

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

可导: 与 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式无关!

考虑两种特殊情况

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$



(1) $\Delta y \equiv 0$, $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + i v(x + \Delta x, y) - u(x, y) - i v(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

(2) $\Delta x \equiv 0$, $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + i v(x, y + \Delta y) - u(x, y) - i v(x, y)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Cauchy - Riemann 条件: 可导的必要条件, 不是充分条件

定理 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义在区域 D 内, $z \in D$, $f(z)$ 在点 z 可微的充要条件是: (1) 二元函数 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微; (2) $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 满足 CR 条件. (A) 各个方向的导数都存在

定理 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是: (1) 二元函数 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导数; (2) $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 在 D 内满足 CR 条件. (B)

(B) $\Rightarrow$ (A)

$\nLeftarrow$

$$f(z) \text{ 解析} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 存在且连续} \\ \text{CR} \end{cases}$$

例: (1) $f = \sqrt{xy}$

(2) $f = \operatorname{Re} z = x$

(3) $f = x^2 - y^2 + 2ixy$

(1) $u = \sqrt{xy}$, $v = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(2) $u = x$, $v = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$f(x, y) \leftrightarrow f(z, \bar{z})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\bar{\partial} f = 0$$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^*} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}^*} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}^*} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \bar{z}^*}}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \bar{z}^*}}_{-\frac{1}{2i}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$= 0 \Leftrightarrow CR$$

极坐标系



Cauchy (1789-1857)



Riemann (1826-1866)

★ 已知解析函数实部 $u(x, y)$, 求 $v(x, y)$.

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$\stackrel{CR}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

例: $u(x, y) = x^2 - y^2$, 求 $v(x, y)$

验证 u 是 harmonic function

(1) 凑全微分显式法

$$dv \stackrel{CR}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$= 2y dx + 2x dy$$

$$= d(2xy)$$

$$\therefore v = 2xy + C \quad \text{积分常数}$$

(2) 曲线积分法

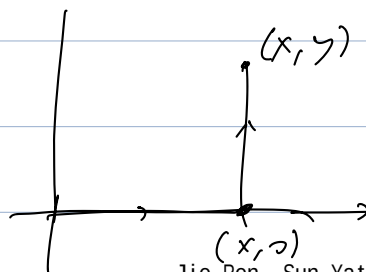
全微分的积分与路径无关

$$dv = 2y dx + 2x dy$$

$$v = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2y dx + 2x dy) + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (2y dx + 2x dy) + C$$

$$= \int_{(x,0)}^{(x,y)} 2x dy + C$$

$$= 2xy + C$$



(3) 不定积分法

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial y} = 2x \\ \frac{\partial V}{\partial x} = 2y \end{cases} \Rightarrow V = \int 2x dy + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2y + \varphi'(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi = C \Rightarrow V = 2xy + C$$

(4) 在 $u(x, y)$ 中代入

$$x = \frac{z+z^*}{2}, \quad y = \frac{z-z^*}{2i}$$

$$\left. \begin{aligned} f &= u + iv \\ f^* &= u - iv \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = \frac{1}{2}(f + f^*) \quad \text{将 } u \text{ 写成这种形式}$$

$$u = \left(\frac{z+z^*}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-z^*}{2i}\right)^2 = \frac{1}{2}\{z^2 + (z^*)^2\}$$

$$\therefore f = z^2 + iC \Rightarrow V = 2xy + C$$

§1.4 初等多值函数

初等函数

Q: e^z 周期

$$\bar{\partial} f = 0$$

基本初等函数 (常数、幂函数、指数函数、对数...

三角... , 反三角...)

§4.1 常数

 $f(z) = c$ 在复平面上解析

§4.2 幂函数

 $f(z) = z^n$, $n = 1, 2, \dots$ 在复平面上解析 (∞ 不解析)

$$f'(z) = n z^{n-1}$$

 $f(z) = z^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) 是多值函数, 暂不考虑.

§4.3 多项式和有理分式

 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($n \in \mathbb{N}$) 在复平面上解析 $Q_m(z)$ $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 有理分式 $Q_m(z) = 0$ 的点 奇点

$$\frac{1}{z^2 + 1}$$

§4.4 指数函数

$$e^z \equiv e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

满足 CR 条件

指数函数为周期函数, 周期为 $2\pi i$

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

§4.5 三角函数

通过指数函数来定义:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$$

三角函数的性质 (1)-(4)

(4) $|\sin z|, |\cos z|$

$$\cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

思: 写出一个初等函数
在 $\mathbb{R}$ 上不发散

$\tan z, \cot z, \dots$

§4.6 双曲函数

也是通过指数函数定义:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$\cosh z \qquad \sinh z$

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z$$

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \cosh(iz) = \cos z, \quad \sin(iz) = i \sinh z, \quad \sinh(iz) = i \sin z$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(iz_1 + iz_2) = \dots$$

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

§1.5 初等多值函数

§1.5.1 根式函数的支点

$$w = \sqrt{z-a}$$

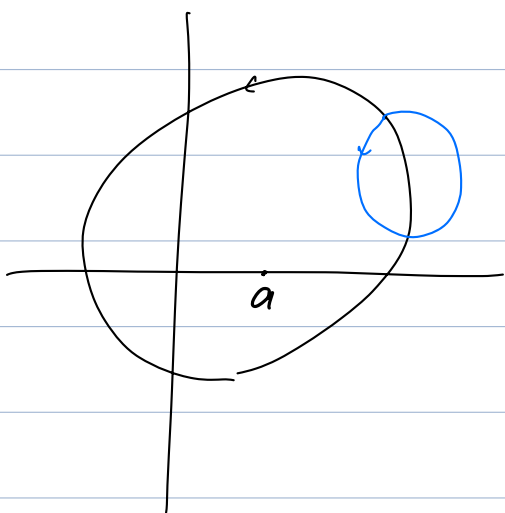
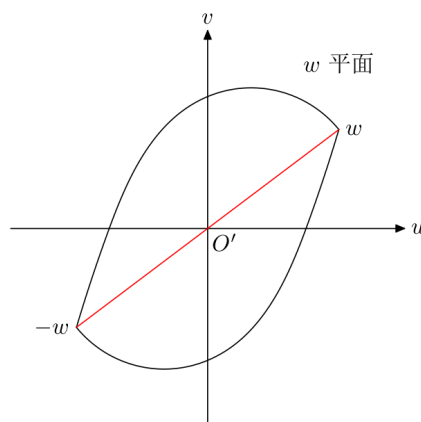
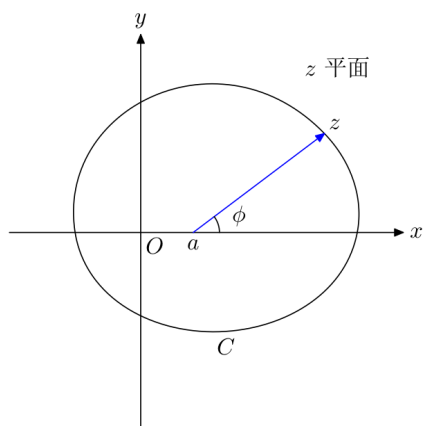
$$z-a = \rho e^{i\phi}$$

单值. 上下文

$$w = \sqrt{\rho e^{i\phi}} = \sqrt{\rho e^{i(\phi + 2k\pi)}} = \sqrt{\rho} e^{i(\frac{\phi}{2} + k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k=0: \quad w_1 = \sqrt{\rho} e^{i\phi/2}$$

$$k=1: \quad w_2 = \sqrt{\rho} e^{i(\phi/2 + \pi)} = -\sqrt{\rho} e^{i\phi/2} = -w_1$$



z 绕 $z=a$ 点 转 一圈, 辐角 $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$

不绕 $z=a$ 点,

$\phi \rightarrow \phi$

绕 ∞ 转 一圈

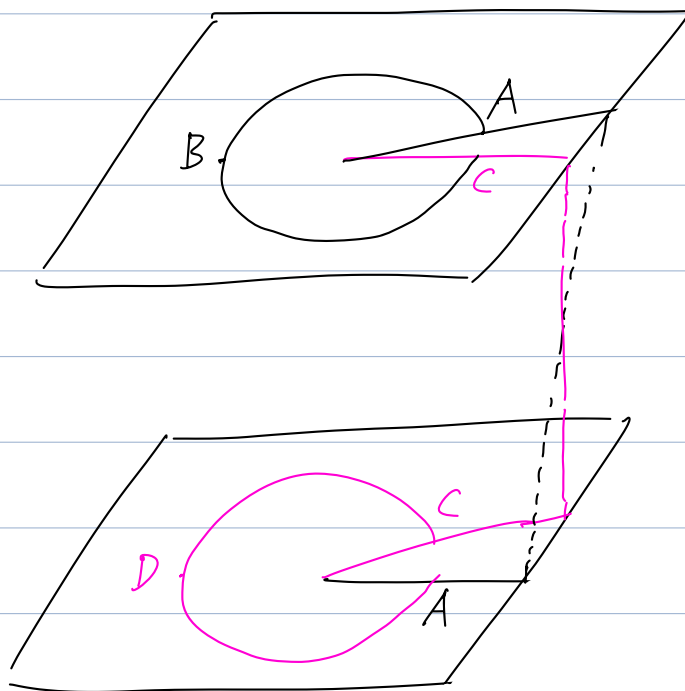
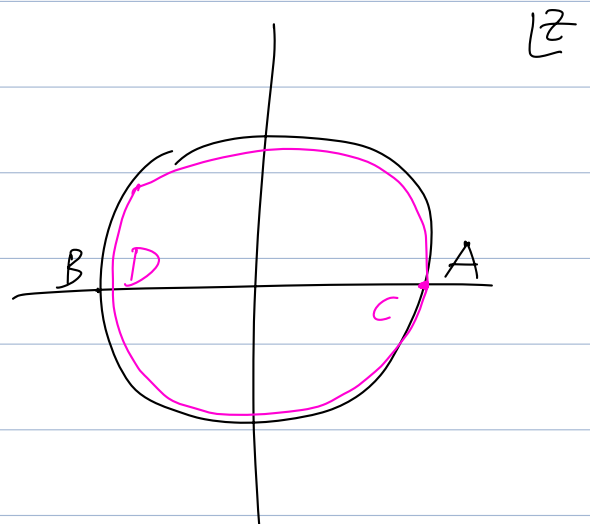
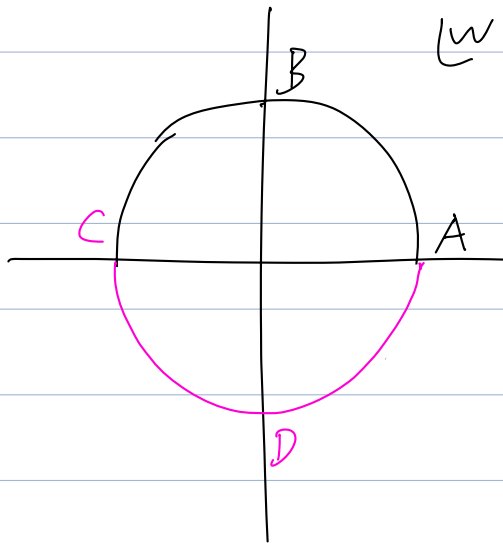
$\phi \rightarrow \phi \pm 2\pi$

两个支点: $z = a, \infty$

$$t = \frac{1}{2}$$

枝 branch point

$$w = \sqrt{z}$$



单值性
两个C剪开
粘起来

§1.5.2 割线与单值分支

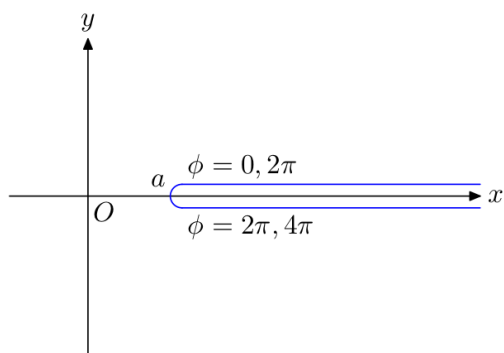


图 4: 函数 $w = \sqrt{z-a}$ 的割线与单值分支

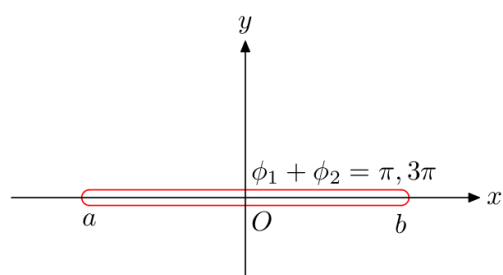
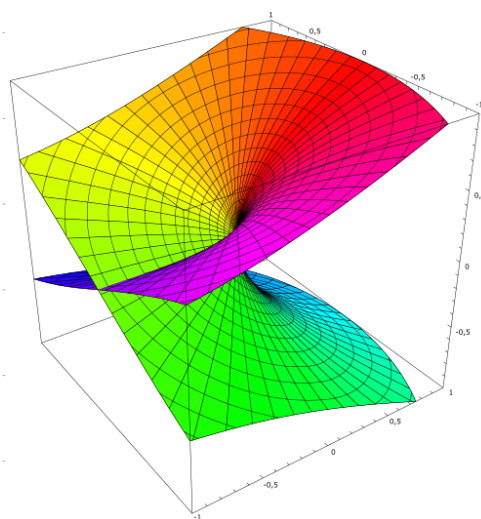
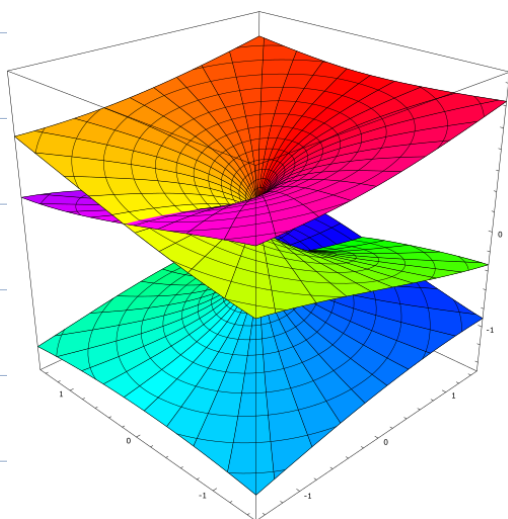


图 5: 函数 $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ 的割线与单值分支

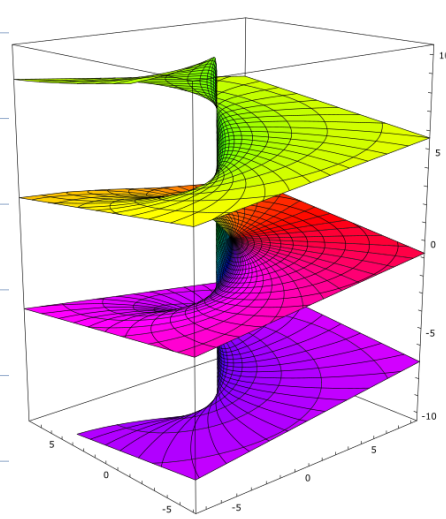
§1.5.3 Riemann 面



$$w = \sqrt{z}$$



$$w = \sqrt[3]{z}$$



$$w = \text{Ln } z$$

§1.5.4 对数函数

指数函数的反函数

$$e^w = z$$

$$w = \text{Ln } z$$

$$z = re^{i\theta}, \quad w = u + iv$$

$$e^u e^{iv} = re^{i\theta}$$

$$w = \text{Ln } z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$z=0$: 超越支点

主值分支: $\ln z = \ln r + i\theta = \ln|z| + i\arg z$

反三角函数

§1.5.5 * 多值函数函数值的确定

思考:
$$\sqrt{-1 + 10^{-10}i}$$
$$\sqrt{-1 - 10^{-10}i}$$

用 Mathematica 检验: 割线在负实轴 (任意 $0-\infty$, 不碍事的地方)

§1.5.6 多值函数的解析性

多值函数在 Riemann 面上变成单值的

支点必为奇点

§1.5.7 对数函数的导数

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$$

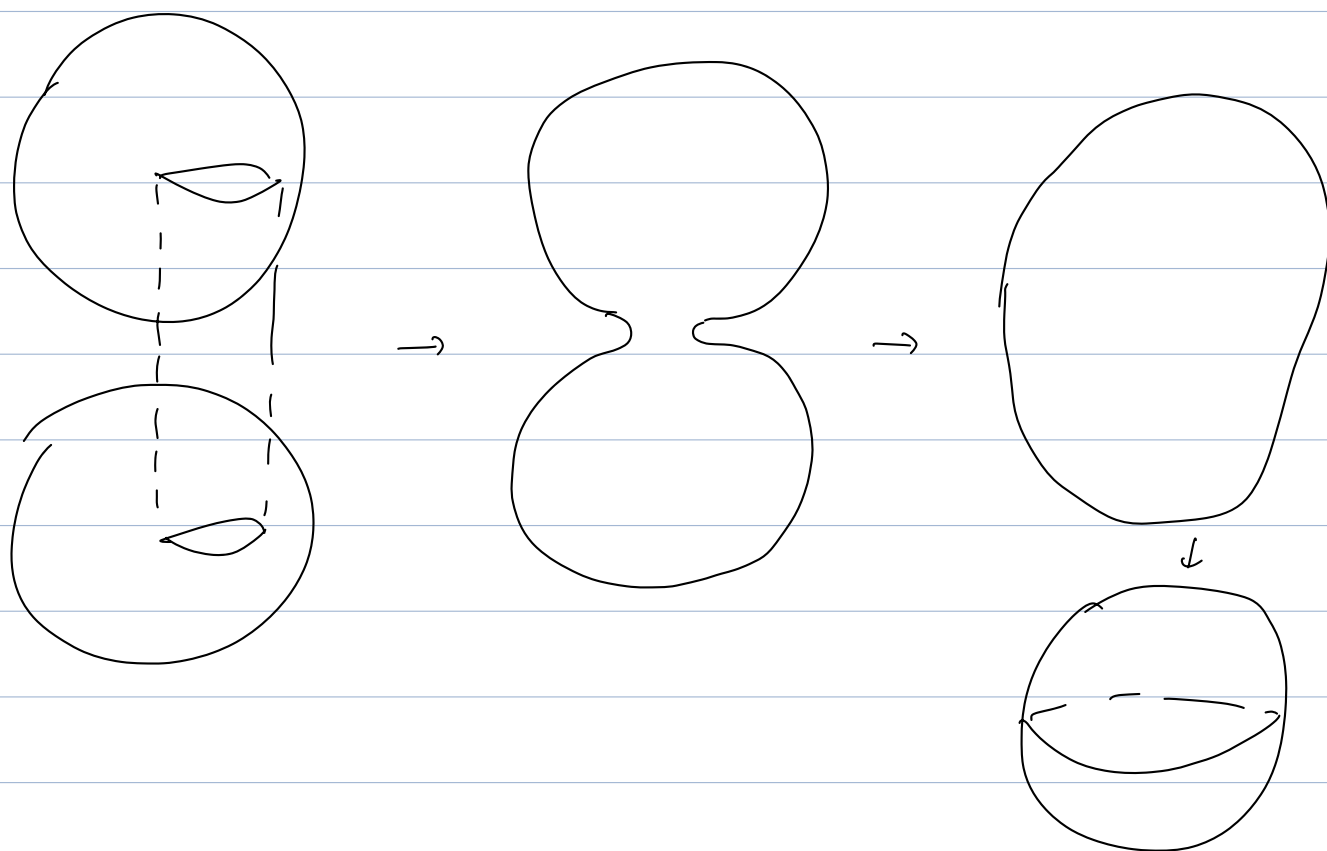
§1.5.8 * 一般幂函数

$$z^\alpha := e^{\alpha \ln z} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

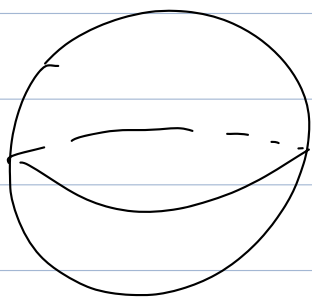
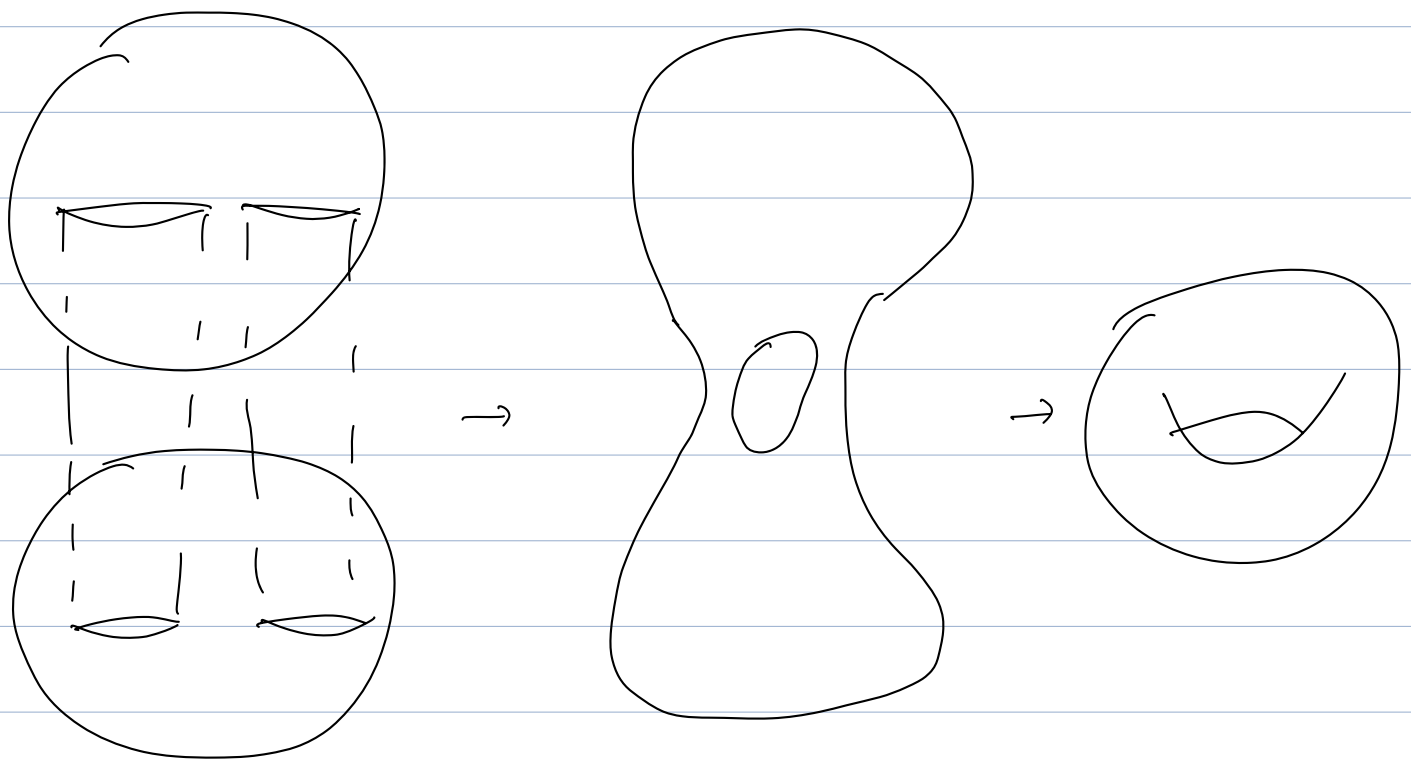
$$w = \sqrt{z^3 - 1}$$

$$\sqrt[n]{P_n(z)}$$

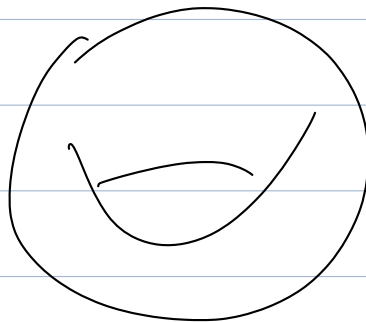
代数黎曼面



天衣无缝

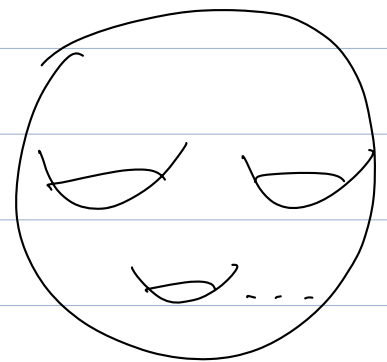


$$g = 0$$



$$g = 1$$

...



$$g$$

For fun: Fermat's Last Theorem

$$X^n + Y^n = Z^n$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$\mathbb{R}: 2 - 1 = 1$$

$$\mathbb{C}: 4 - 2 = 2$$

$$g = 0$$

$$a^3 + b^3 = 1$$

$$g = 1$$

$$a^n + b^n = 1$$

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

§6 解析函数的物理意义

§6.1 调和函数

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\Delta_2, \Delta_3$$

$u(x, y)$ 三维、更高维

§6.2 解析函数与调和函数的关系

$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数,

$\Rightarrow u(x, y), v(x, y)$ ----- 调和函数

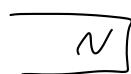
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} (\dots) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} (\dots) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow (\partial_x^2 + \partial_y^2) u = 0 \rightarrow \text{能解出来吗? } f(z)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = d(\dots)$$

$u(x, y), v(x, y)$ 描写无电荷区域静电场的电势. 二维

场:



光速传递

数学: 时空坐标的函数

物理: 物质的一种形式

麦克斯韦: 力线; 麦克斯韦: 场

量子: Fermion

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad \leftarrow \text{麦氏方程}$$

ρ : 源 无电荷区域为0

电势 φ

3维问题 $\Delta_3 \varphi = 0$

没有类似于复变函数的方法

$$f = u(x, y) + i v(x, y)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
实部 电势

§6.3 正交曲线族

$u(x, y) = C_1$ 和 $v(x, y) = C_2$ 正交

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 = A_1 B_1 + A_2 B_2$$

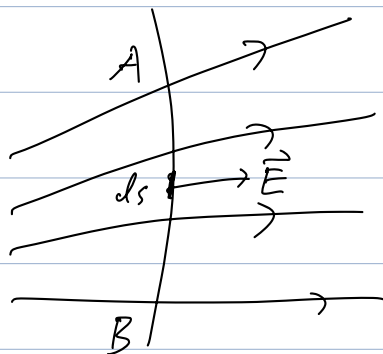
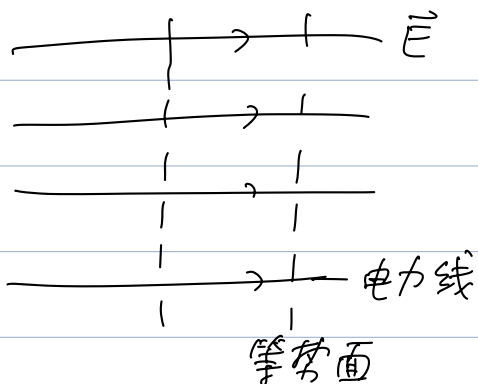
法矢 $\nabla u, \nabla v$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{CR}{=} 0$$

$u(x, y) = C_1$ 等势线族 — 电势

$v(x, y) = C_2$ 电力线族 — ?



v 的物理意义: 通量

有多少根电力线穿过一个面

例: 电力线方程为 $x^2 - y^2 = C_1$, 求等势线方程.

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$xy = C_2$$

作业 上升一个层次

$x^2 + y^2 = C$ 为等势面 $\Rightarrow$ 电势为 $x^2 + y^2$

提示: $u = F(t)$, $t = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F'(t) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(t) \cdot (2x)^2 + F'(t) \cdot 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F'(t) \cdot 2y$$

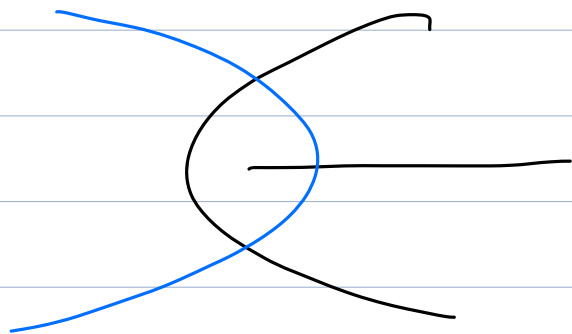
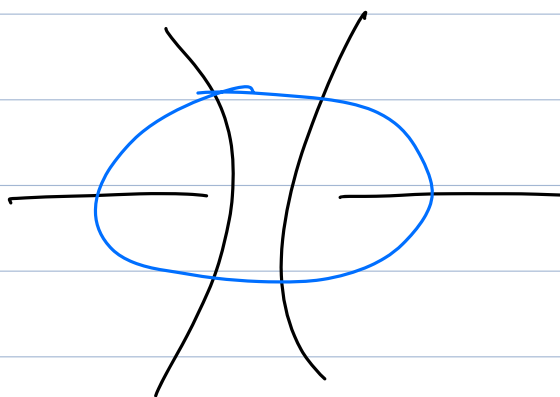
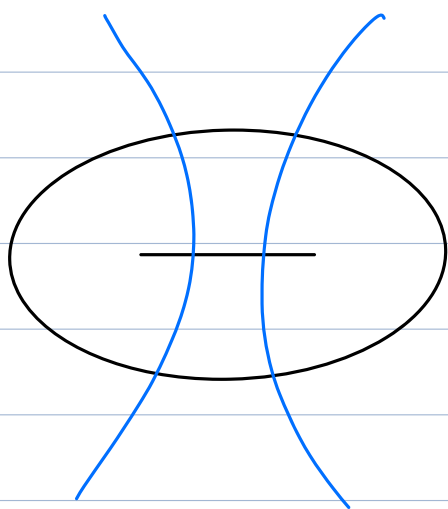
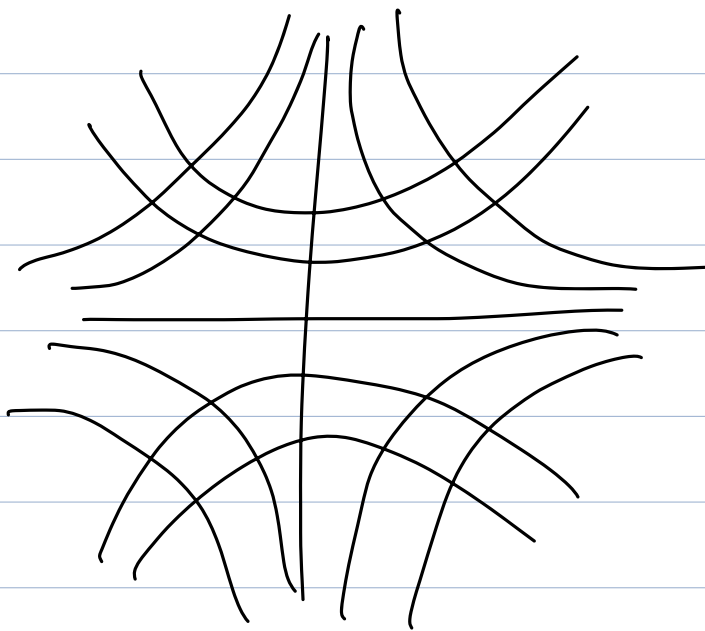
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F''(t) \cdot (2y)^2 + F'(t) \cdot 2$$

$$\nabla^2 u = 0 \Rightarrow 4F''(t)(x^2 + y^2) + 4F'(t) = 0$$

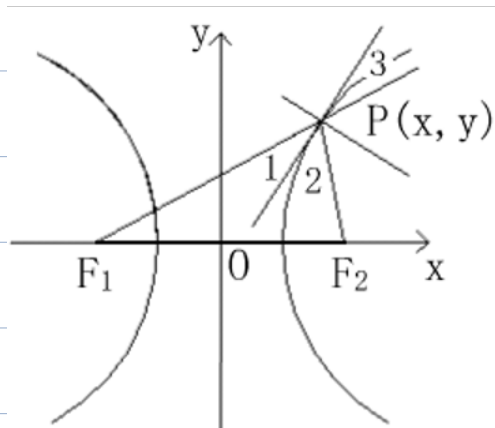
$$\Rightarrow F \Rightarrow u \Rightarrow v$$

另一种方法:

$$u = C_1 \ln z \bar{z} + C_2$$



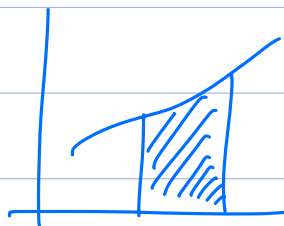
光学性质证明



Chap. 2 复变函数的积分

引言

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) + (-1) \cdot F(a)$$



内部和边界联系起来

Stokes 公式 $\int_D dw = \int_{\partial D} w$

d 和 ∂ 之间有联系

$$\oint_{\partial \Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Cauchy 积分定理

§2.1 复积分的定义和基本性质

§2.1.1 曲线的方向

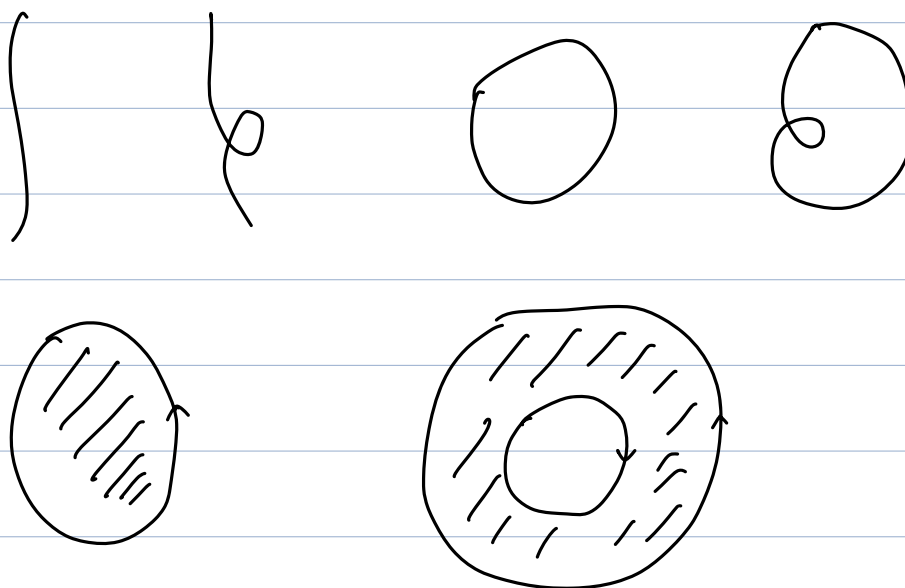
光滑 逐段光滑

· 简单曲线

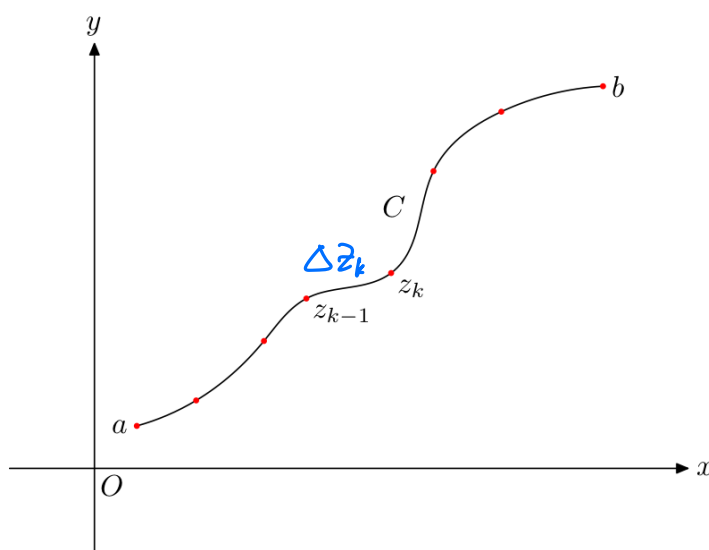
方向: 起点 $\rightarrow$ 终点

· 围道 (contour)

方向: 沿着围道走, 其所包围的区域在左边



§2.1.2 复积分的定义与存在性



定义 (复积分) 设函数 $f(z)$ 沿曲线 C 有定义, 在 C 上从起点 a 到终点 b 取分点

$$a = z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_{n-1}, z_n = b$$

将 C 分为 n 个弧段, 在 z_{k-1} 至 z_k 的弧段上任取一点 ζ_k , 作和数

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k,$$

ζ zeta

其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. 若 $n \rightarrow \infty$ 且 $\max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0$ 时, $S_n \rightarrow I$, 则称 $f(z)$ 沿 C 可积, 并称 I 为 $f(z)$ 沿 C 的积分, 记作

$$I = \int_C f(z) dz.$$

$\int_C f(z) dz$

Thm (积分存在) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积

$$\begin{aligned}\text{且 } \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy\end{aligned}$$

§2.1.3 复积分的基本性质

$$1. \int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$$2. \int_{C_1 + C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

$$3. \int_{C^-} f(z) dz = - \int_C f(z) dz. \quad \text{反向}$$

$$4. \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| = \int_C |f(z)| ds.$$



最后一个积分中的 $ds = |dz|$ 就是弧长的微分。这些性质都可以直接由积分的定义来证明。比如, 利用 三角不等式, 有

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k|,$$

§2.2 复积分的计算

§2.2.1 * 用定义计算

$$\int_C dz \quad \int_C z dz$$

§2.2.2 曲线积分方法

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$$

实变函数曲线积分

例 3 用曲线积分方法重新计算例 1.

解 $f(z) = 1$, 即 $u(x, y) = 1$, $v(x, y) = 0$. 按式 (1), 有

$$\int_C dz = \int_C dx + i \int_C dy = x|_a^b + iy|_a^b = (x + iy)|_a^b = z|_a^b = b - a.$$

例 4 用曲线积分方法重新计算例 2.

解 $f(z) = z$, 即 $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$. 按式 (1), 有

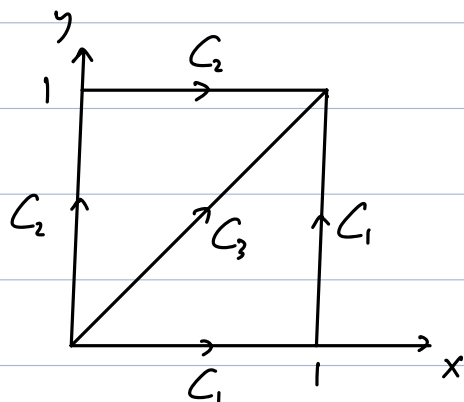
$$\begin{aligned} \int_C z dz &= \int_C x dx - y dy + i \int_C y dx + x dy = \int_C d \left[\frac{1}{2}(x^2 - y^2) \right] + i \int_C d(xy) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + i2xy) \Big|_a^b = \frac{1}{2}(x + iy)^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}z^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

例: $f(z) = \operatorname{Re} z$

$$I_1 = \int_{C_1} \operatorname{Re} z dz$$

$$I_2 = \int_{C_2} \operatorname{Re} z dz$$

$$I_3 = \int_{C_3} \operatorname{Re} z dz$$



$$I_1 = \int_0^1 x dx + \int_0^1 i dy = \frac{1}{2} + i$$

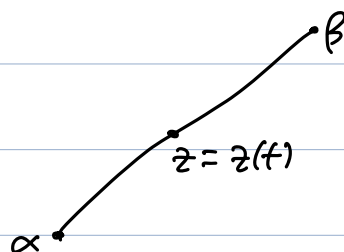
$$I_2 = \int_0^1 x \cdot i dy + \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$f(z)$ 只含 z : 积分结果只与起点和终点有关, 与路径无关

$f(z, \bar{z})$: 积分一般依赖于路径

§ 2.2.3 参数方程法

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$$



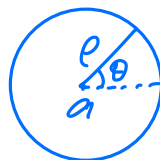
例 5 由于 $z^n(t)z'(t)$ 的原函数显然是 $z^{n+1}(t)/(n+1)$, 故有

$$\int_a^b z^n dz = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

结果与曲线 C 的细节无关, 而只依赖于起点和终点. 如果 C 是围线, 即 $b = a$, 则

$$\int_C z^n dz = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \forall \text{ 围线 } C. \quad (6)$$

例 6 计算积分 $\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^n}$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$.



解 当 $n \leq 0$, 由式 (6) 可知结果为 0, 这与下面的结果一致. 圆周 $|z-a|=\rho$ 的参数方程为 $z(\theta) = a + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), 这里我们将参数写作 θ , 因为它是角度. 按式 (4), 有

$$dz = \rho e^{i\theta} d\theta$$

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta} d\theta}{\rho^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta,$$

如果 $n \neq 1$, 易得原函数为 $-e^{-i(n-1)\theta}/(n-1)\rho^{n-1}$, 代入上下限, 结果为 0. 若 $n = 1$, 则结果显然为 $2\pi i$. 所以

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & (n = 1), \\ 0, & (n \in \mathbb{Z}, n \neq 1), \end{cases} \quad (7)$$

注 ① 这一结果与 a 和 ρ 的数值无关. ② 后面将证明, 这一结果对任何包围 a 点的围线成立. ③ $n = 1$ 时结果不为 0, 这是因为被积函数在积分围线内存在奇点 $z = a$. 由此可以进一步推测, Cauchy 积分定理中的 $f(z)$ 应该在围线 C 及其内部解析, 而不仅仅是围线 C 上解析. ④ 虽然 $n = 2, 3, \dots$ 时, 结果也为 0, 但这只是一个具体的结果, 没有必然性.

$$\int z^n dz = \begin{cases} \frac{z^{n+1}}{n+1} & n \neq -1 \\ \ln z & n = -1 \end{cases}$$

$$n = -1 + \epsilon$$

$$\int z^n dz = \frac{z^\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} e^{\epsilon \ln z} = \frac{1}{\epsilon} + \ln z + O(\epsilon)$$

§2.3 Cauchy 积分定理

Thm 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,
 C 为 D 内的任一围线, 则

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Pf 假定 $f(z)$ 连续

Cauchy 1825
Goursat 1900

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + i dy)$$

$$= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$$

$$= - \iint_G \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_0 dx dy + \iint_G \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_0 dx dy$$

CR
= 0

定理 (Cauchy 积分定理的等价表述) C 为复平面上的围线, D 是 C 所包围的单通区域, 函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D} = D + C$ 上解析, 则

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

定理 (Cauchy 积分定理的强化形式) C 为复平面上的围线, D 是 C 所包围的单通区域, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\bar{D} = D + C$ 上连续, 则

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

加强定理 < 弱化条件
强化结论

§2.3.2 * 证明略

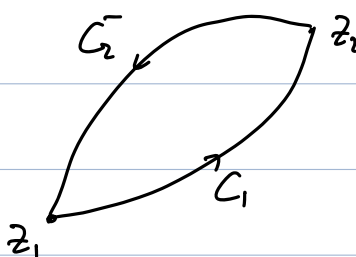
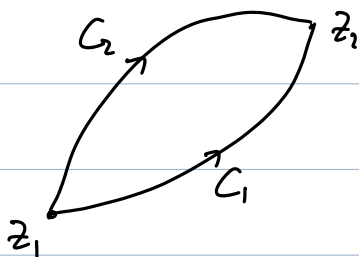
§2.3.3 Cauchy 积分定理的推论

推论 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析, $z_1, z_2 \in D$, 则积分 $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ 与 $(D$ 内) 由 z_1 到 z_2 的路径无关.

证明 任取 D 内由 z_1 到 z_2 的两条路径 C_1 和 C_2 , 有

$$\int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz = \int_{C_1 + C_2^-} f(z) dz = 0,$$

其中前两步都是用积分的基本性质, 最后一步用了 Cauchy 积分定理, 因为 $C_1 + C_2^-$ 构成 D 内的围线. 证毕.



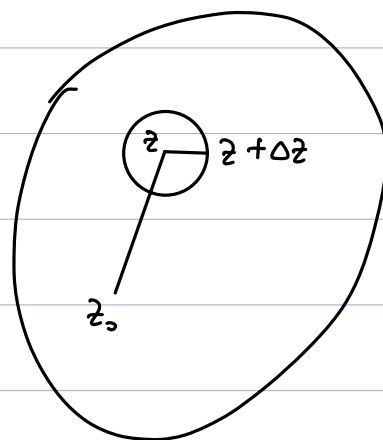
定理 (变上限积分) 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析, $z_0 \in D$ 是定点, 则由 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ 定义的函数在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

只需证 $F'(z) - f(z) = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \\ &= \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) - f(z)$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) d\zeta$$



$$\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_P [f(\zeta) - f(z)] d\zeta,$$

而

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_P [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_P |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta|.$$

由于 $f(z)$ 在 D 内解析, 故必在 D 内连续, 所以, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, 有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 今取 $|\Delta z| < \delta$, 则线段 P 上的各点均满足 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$, 于是

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \int_P |d\zeta| = \varepsilon,$$

也就是说,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z), \quad z \in D.$$

定义 (原函数) 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 若有函数 $\Phi(z)$ 满足 $\Phi'(z) = f(z)$, 则 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 的一个不定积分或原函数.

注 ① 本来在这一定义中并没有必要要求 $f(z)$ 解析, 但后面我们会看到, 当 $\Phi(z)$ 解析 (因为 $\Phi'(z) = f(z)$ 存在), 则 $\Phi'(z)$ 亦必解析, 从而 $f(z) = \Phi'(z)$ 也解析. 换句话说, 如果 $f(z)$ 不解析, 它也不可能存在原函数. 所以上述定义只针对解析函数就是很自然的了. ② 原函数显然不是唯一的, 因为如果 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的原函数, 则 $\Phi(z) + c$ 也是它的原函数, 其中 c 是复常数. 但任意两个原函数也只能相差一个常数, 因为如果 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 都是 $f(z)$ 的原函数, 则 $[\Psi(z) - \Phi(z)]' = 0$, 由此易证 $\Psi(z) - \Phi(z) = c$.

定义了原函数, 就可以给出一个计算积分的公式, 但仍然要注意它的条件.

定理 (Newton-Leibniz 公式) 设函数 $f(z)$ 在单通区域 D 内解析, $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的任一原函数, 则

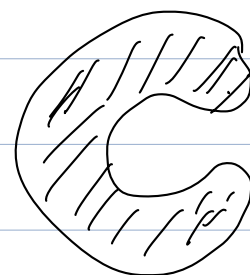
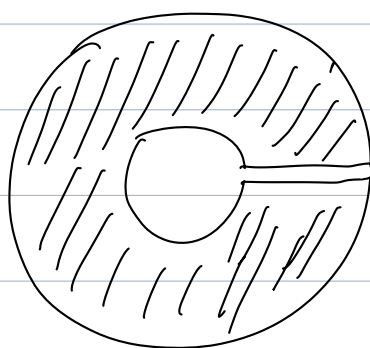
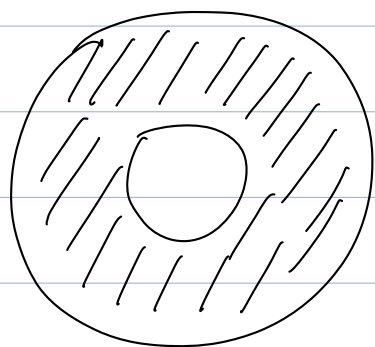
$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \quad z, z_0 \in D \quad (14)$$

证明 记 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$, 则 $F'(z) = f(z)$, 又已知 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的原函数, 则根据上面的讨论有 $\Phi(z) = F(z) + c$. 以 z_0 代入, 可得 $\Phi(z_0) = F(z_0) + c = c$, 所以 $F(z) = \Phi(z) - c = \Phi(z) - \Phi(z_0)$, 此即式 (14). 证毕.

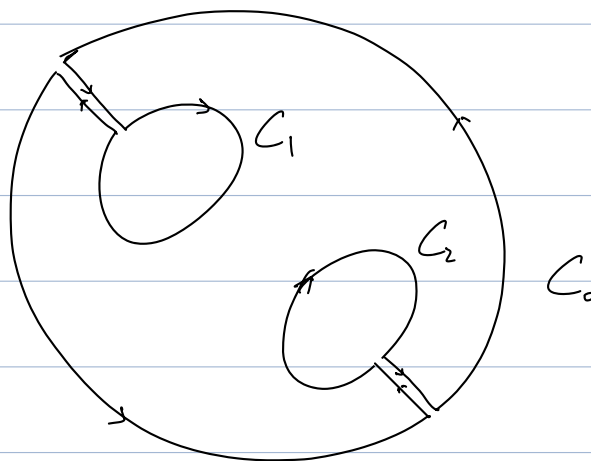
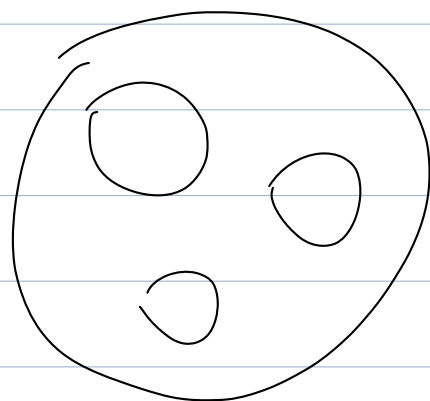
§3.4 复连通区域的柯西积分定理

$f(z) = \frac{1}{z}$ 在去掉原点的复平面上解析

函数在区域上有不解析的点 (不可导, 奇点)



单通区域

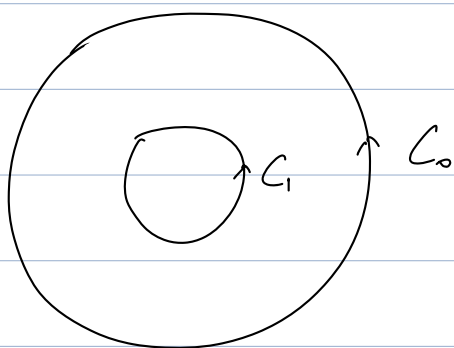


$$C = C_0 + \underbrace{C_1^- + C_2^- + \dots + C_n^-}_{\text{顺时针}}$$

$\downarrow$ 逆时针

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_0} f(z) dz + \oint_{C_1^-} f(z) dz + \oint_{C_2^-} f(z) dz + \dots = 0$$

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots \quad \oint$$



$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz$$

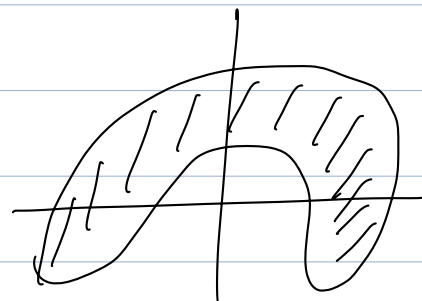
只要起点、终点不变, 当积分路径 连续变形 时, 积分数值不变.
不跳过“孔”

例3: C 是包含 a 的任一围线

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z}, n \neq 1) \end{cases}$$

如果围线不包围 a 点, 积分结果为 0.

当 $n \neq 1$ 时, 无论围线是否包围 a 点, 积分都是 0.



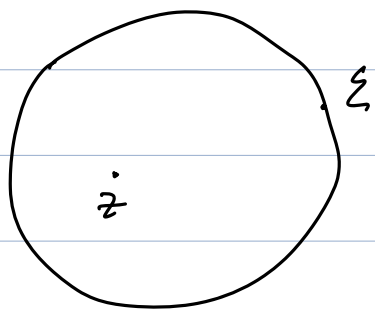
$n \neq 1$	原函数	$\frac{(z-a)^{-n+1}}{-n+1}$	逆时针绕 a 一周, 原函数改变量为 0
$n = 1$		$\ln(z-a)$	----- $2\pi i$

§2.4 柯西积分公式及其推论

§2.4.1 柯西积分公式

设区域 D 的边界是围线或复围线 C , 函数在 D 上解析, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$



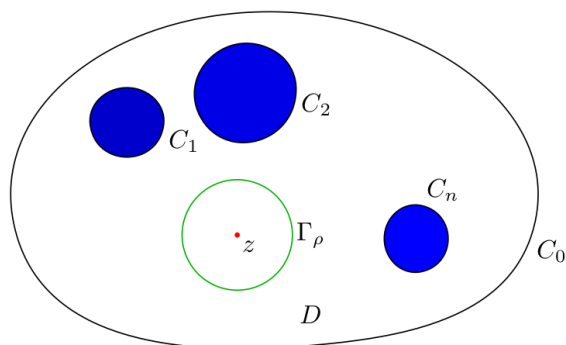
边界上的函数值 $f(\xi)$

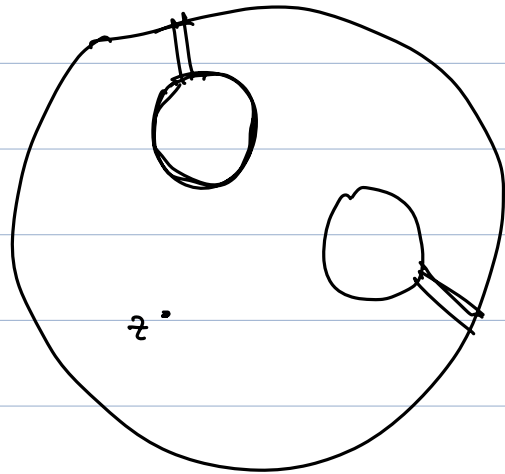
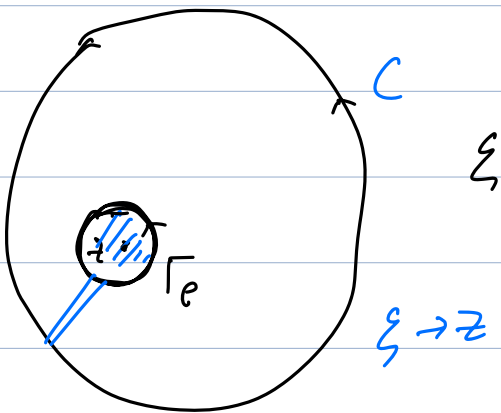
$\Rightarrow$ 区域内的函数值 $f(z)$

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

柯西积分公式 $\Rightarrow$ 柯西积分定理:

$$\int_C F(z) dz = \int_C \frac{(z-a)F(z)}{z-a} dz = 2\pi i [(z-a)F(z)] \Big|_{z=a} = 0$$





已知 $0 = \int_{C + \Gamma_\rho^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$\Gamma_\rho: |\xi - z| \leq \rho$$

$$= \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\Gamma_\rho^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\xi - z = \rho e^{i\theta}$$

$$2\pi i f(z) = f(z) \cdot \int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{\xi - z} d\xi = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi$$

要证 $\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2\pi i f(z) = 0$

$\xi \rightarrow z$ $f(\xi)$

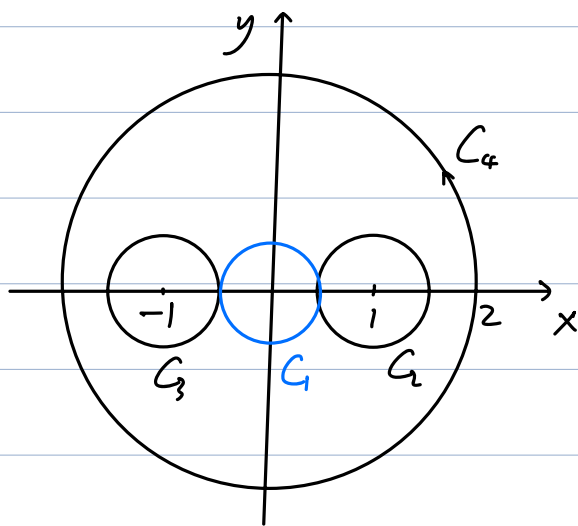
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad |\xi - z| < \delta \\ |f(\xi) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

$$\left| \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2\pi i f(z) \right| \leq \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma_\rho} |f(\xi) - f(z)| |d\xi|$$

$$\leq \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 2\pi \rho = \varepsilon \rightarrow 0$$

例: $I = \int_C \frac{dz}{z^2-1}$ 其中围道 C 是:

(1) $|z| = \frac{1}{2}$; (2) $|z-1| = \frac{1}{2}$; (3) $|z+1| = \frac{1}{2}$; (4) $|z| = 2$



(1) $I = 0$

(2) $I = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{1}{z+1} \Big|_{z=1} = \pi i$

(3) $I = \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z-1}}{z+1} dz = 2\pi i \frac{1}{z-1} \Big|_{z=-1} = -\pi i$

(4) $I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i - \pi i = 0$

§2.4.2 * 无界区域的 Cauchy 积分公式

定理 (无界区域的 Cauchy 积分公式) 设函数 $f(z)$ 在围线 C 及其外部的无界区域 D 上解析, 且当 $z \rightarrow \infty$ 时, $f(z) \Rightarrow 0$, 则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D, \quad (17)$$

其中积分取 C 的反方向, 实即 ∂D 的正方向.

§2.4.3 解析函数的高阶导数

定理 (Cauchy 高阶导数公式) 设区域 D 以围线或复围线 C 为边界, 函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}$ 上解析, 则 $f(z)$ 在区域 D 内有各阶导数, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in D, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

解析函数存在各阶导数

边界上的函数值 $\rightarrow$ 内部 $f(z)$ 及 $f^{(n)}(z)$

$\frac{d}{dz}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

交换求导和积分
不严格

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z - \Delta z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z - \Delta z)} d\xi$$

$$\Delta z \rightarrow 0: \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

交换求极限与积分
仍不严格

练习: $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z-2)^2} dz$

§4.4 *Liouville 定理

Cauchy 积分公式和高阶导数公式有许多有趣的推论，我们只介绍其中的一个，即 Liouville 定理，在下一小节中，我们要用它来证明代数基本定理。我们在前面曾提到整函数 (entire function)，下面正式给出定义。

定义 (整函数) 在整个 z 平面上解析的函数称为整函数。

例 多项式、指数函数、正弦、余弦等函数都是整函数。

定理 (Liouville) 有界整函数 $f(z)$ 必为常数。

注 这一定理表明，一个解析函数，要么有奇点，要么当 $z \rightarrow \infty$ 时，至少在某些方向是无限的，除非是常数。因此，不存在什么处处解析、处处有限而非平庸的“理想”解析函数。这使得我们对于解析函数的函数值分布的特性有了一个大致的图象。

证明 由于 $f(z)$ 有界，故 $\exists M > 0, \forall z \in \mathbb{C}$ ，有 $|f(z)| \leq M$ 。今任取固定点 z ，作圆周 $\Gamma_R: |\zeta - z| = R$ ，由高阶导数公式

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

故

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{|f(\zeta)|}{R^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \int_{\Gamma_R} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

今 $\forall \varepsilon > 0$ ，只要 $R > M/\varepsilon$ ，就有 $|f'(z)| < \varepsilon$ ，但 $f'(z)$ 实际上与 R 无关，故 $f'(z) = 0$ ，又因为 z 是任意的，故 $f(z)$ 为常数。证毕。

§4.5 *代数基本定理

在复变函数理论中，可以很简单地证明代数基本定理，这是复变函数理论的应用之一。

定理 (代数基本定理) 在 z 平面上， n 次多项式 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ 至少有一个零点。

证明 设 $P_n(z)$ 在 z 平面上没有零点，则 $f(z) = 1/P_n(z)$ 在 z 平面上解析，即为整函数。又

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{P_n(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n \sum_{k=0}^n a_k z^{-(n-k)}} = 0,$$

所以 $f(z)$ 有界。事实上，由上面的极限可知， $\exists R > 0$ ，当 $|z| > R$ 时，有 $|f(z)| < 1$ ，而由 $f(z)$ 的连续性，在 $|z| \leq R$ 上， $\exists M > 0$ ，使 $|f(z)| \leq M$ ，所以在 z 平面上， $|f(z)| < M + 1$ ，即有界。由 Liouville 定理，在 z 平面上， $f(z)$ 为常数，从而 $P_n(z)$ 为常数，这显然是不对的。证毕。

最大模定理：解析函数的最大模必定在边界上取得。

$$|f(z)|$$

微分方程 + 边界条件 $\Rightarrow$ 解

2D, 3D



Ch. 3 解析函数的幂级数展开

热身

$$(1) (1-1) + (1-1) + (1-1) \dots = 0 \quad \text{Euler}$$

$$(2) 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) - \dots = 1$$

$$(3) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$x=1: \quad \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \dots =$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots =$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{k^4} + \dots =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots =$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots \triangleq) \quad 1e^{-a} + 2e^{-2a} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \underline{x < 1} \quad \text{收敛半径}$$

$$x=2: \quad -1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots \quad \times$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\text{代入 } x=1: \quad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

§1 复常数项级数

§1.1 基本概念与基本判别法

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_k + \cdots \quad (*)$$

$$w_k = u_k + i v_k$$

$$\sum_k w_k = \sum_k u_k + i \sum_k v_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n w_k \quad \text{部分和}$$

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$ 是有限复数, 则称级数 (*) 收敛于 s .

否则称发散.

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$$

对于数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是否收敛、即其极限是否存在的问题, 类似于实数列, 我们有 Cauchy 收敛原理: 数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是, $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+, \forall p \in \mathbb{N}^+$, 均有 $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. (这一精确描述的大意是: 从某一项开始, 数列的各项均聚集在其附近. 这样就容易理解存在极限了.)

$$s_1, s_2, \cdots, \boxed{s_n, s_{n+1}, \cdots, s_{n+p}}, \cdots$$

注 Cauchy 收敛原理也称为 Cauchy 判敛准则, 它的另一种更常见的表述是: 数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > n_0$ 时, $\forall p \in \mathbb{N}^+$, 均有 $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. (这一精确描述的大意是: 当数列的下标足够大以后, 任何两项的距离都可以任意小. 更形象地说, 越往后, 数列的各项就越是挤在一起. 这样也容易理解存在极限.) 两种表述的区别是: 在第一种表述中, n 足够大但固定; 在第二种表述中, n 足够大但也是任意的. 容易证明, 两种表述是等价的. 第一种表述显得更简洁

$$s_1, s_2, \cdots, s_{n_0}, \cdots, \boxed{s_n, s_{n+1}, \cdots, s_{n+p}}, \cdots$$

★ 柯西收敛原理

级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和序列收敛.

$\forall \varepsilon, \exists n \in \mathbb{N}^+, \forall p \in \mathbb{N}^+, \text{ 均有}$

$$\left| \sum_{k=1}^p w_{n+k} \right| < \varepsilon$$

必要条件: $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$

不满足 $\Rightarrow$ 发散

Cauchy 收敛原理是一个基本的判别法. 估计 $\downarrow$ 的上限.

在级数中添加或去掉有限项, 不改变级数的收敛或发散性质.

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} \alpha_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k = \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k}$$

$$\left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\alpha_{n+p}| = \left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} + \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{n+k} \right| < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ 收敛: 则称 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ 绝对收敛. *

条件收敛.

绝对收敛的级数必定收敛.

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} w_{n+k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |w_{n+k}|$$

判别法: 判别级数是否收敛

不存在一劳永逸的解决方案.

* 比较判别法

$$\begin{array}{ccccccc} \text{已知} & V_1 & + & V_2 & + & V_3 & + \cdots + V_k + \cdots & \text{收敛} \\ & \checkmark & & & & & \checkmark & \\ & |u_1| & & & & & |u_k| & (k \text{ 是够大即可}) \end{array}$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ 收敛, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 绝对收敛.

反之, $|u_k| \geq V_k > 0$, $\sum V_k$ 发散 $\Rightarrow \sum |u_k|$ 发散

* 比值判别法

若存在与 n 无关的常数 ρ , 则当 $|u_{k+1}/u_k| < \rho < 1$ 时,

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ 绝对收敛; 当 $|u_{k+1}/u_k| > \rho > 1$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ 发散

* 达朗贝尔判别法

若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = l < 1$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ 收敛;

----- $>$ ----- 发散.

* 柯西判别法

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 收敛;

----- $>$ ----- 发散.

$= 1$

无法判断

(§1.5 Gauss 判别法)

正项级数, 足够大 k

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = 1 + \frac{r}{k} + \frac{\theta_k}{k^2}$$

$\left\{ \begin{array}{ll} r > 1 & \text{收敛} \\ r \leq 1 & \text{发散} \end{array} \right.$

例 1 几何级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$. 当 $|\alpha| < 1$ 时, 由于正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^k$ 收敛, 故原级数绝对收敛. 当 $|\alpha| \geq 1$ 时, 式 (3) 不能成立, 故原级数发散.

(§1.3 更序级数)

加法的结合律对于收敛的级数仍然成立.

--- 交换律 - - - - - ? *

只对绝对收敛的级数成立.

$(\varphi(k) : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+ \text{ 双射, } \neq id : \sum_{k=1}^{\infty} w_{\varphi(k)} \text{ 称为 } \sum_{k=1}^{\infty} w_k \text{ 的更序级数. (rearranged series).})$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots = \frac{3}{2} \ln 2$$

两个绝对收敛的级数逐项相乘也是绝对收敛.

$$\sum_k u_k \cdot \sum_l v_l = \sum_{k,l} u_k v_l$$

$$= \begin{aligned} & \cancel{u_0 v_0} + \cancel{u_0 v_1} + \cancel{u_0 v_2} + \cancel{u_0 v_3} + \cdots \\ & + \cancel{u_1 v_0} + \cancel{u_1 v_1} + \cancel{u_1 v_2} + \cancel{u_1 v_3} + \cdots \\ & + \cancel{u_2 v_0} + \cancel{u_2 v_1} + \cancel{u_2 v_2} + \cancel{u_2 v_3} + \cdots \\ & + \cdots \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \text{重级数}$$

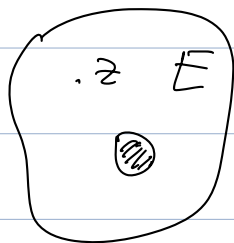
合并同类项

§2. 复函数项级数

§2.1 普通函数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

↓ 点集 E 上的复变函数



$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z) \quad \text{部分和}$$

在 E 收敛: $\forall z \in E$ 在点集 E 上收敛. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f(z)$

取定一个点 $\rightarrow$ 常数项级数

§2.2 一致收敛的函数项级数

· 逐点收敛

· 在 E 上各点的行为有何共性 $\rightarrow$ 一致收敛

“级数在各点的收敛速度大致相同”

Def 点集 E $f(z)$. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > n_0$ 时,

$$|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

在 E 上处处成立. 在 E 上一致收敛于 $f(z)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_k(z) + \left. \begin{array}{c} | \\ \vdots \end{array} \right\} \cdots \cdots$$

存在不依赖于 z 的 n_0 .

$n_0(z)$

$n_0(\varepsilon, z)$

一致收敛的充分条件

Thm (Weierstrass M-判别法) 如果存在正数列 $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$$|f_k(z)| \leq M_k, \quad \forall z \in E, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

且正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 在 E 上绝对收敛且一致收敛.

例: $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 在闭圆 $|z| \leq r < 1$ 上绝对收敛且一致收敛
在单位圆 $|z| < 1$ 上不能一致收敛.

$$\downarrow \sum_{k=1}^{\infty} r^k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ $|z| < 1$ 绝对收敛, ($\sum_{k=1}^{\infty} |z|^k$ $|z| < 1$ 收敛)
 $|z| < 1$ 不能一致收敛. ☆

$$f(z) = \frac{z}{1-z}, \quad s_n(z) = \frac{z(1-z^{n+1})}{1-z}$$

部分和

$$|s_n(z) - f(z)| = \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow n_0 = \frac{\ln(\varepsilon|1-z|)}{\ln|z|}$$

$n > n_0$ 时有 $|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

n_0 不仅依赖于 ε , 还依赖于 z .

当 $|z| \rightarrow 1$ 时, 无法找到一个共同的 n_0 , 使上式在 $|z| < 1$ 一致成立.

例: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k^s}$ 当 $s > 1$ 时在 $0 \leq \theta < 2\pi$ 上绝对收敛且一致收敛.

正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ 满足上述定理的要求

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} \quad s > 1 \quad |z| = 1$ 绝对、一致收敛
闭圆 $|z| \leq 1$ - - - - -

例. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k^s}$

当 $0 < s < 1$ 且 $\theta \neq 0$ 时 条件收敛.

$\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta$ 一致收敛 ($0 < \delta < \pi$)

Pf 略

Thm 若 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在点集 E 上连续, 且级数在 E 上一致收敛于函数 $f(z)$, 则 $f(z)$ 亦在 E 上连续.

↓ 如不满足 $f(z)$ 不一定连续

例: $f_1(z) = z, f_k(z) = z^k - z^{k-1} (k=2, 3, \dots)$

$S_n(z) = z^n \quad |z| < 1$ & 点 $z=1$ 收敛

$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 不连续

因为在 $z = x \in [0, 1)$ 不能一致收敛:

$|S_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

为使 $n > n_0$ 时, $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 需取 $n_0 \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$. $x \rightarrow 1$
无共同 n_0 .

Thm (逐项积分) 各项在曲线 C 上连续, 级数在 C 上 一致收敛 于 $f(z)$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz$$

即 $\sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz = \int_C \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz$

积分与求和可以交换次序.

求导?

§2.3 解析函数项级数

各项 $f_k(z)$ 均为解析函数

Thm (Weierstrass) 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 的各项均在 D 内解析, 且级数在 D 内的任一有界闭集上一致收敛 (称为在 D 上内闭一致收敛) 于函数 $f(z)$. 则

(1) 和函数 $f(z)$ 在 D 内解析.

(2) 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z)$ 在 D 内闭一致收敛到 $f^{(p)}(z)$, 其中 $p \in \mathbb{N}^+$.

比在 D 内一致收敛要弱

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z} \quad \text{在 } |z| < 1 \text{ 内解析}$$

Pf. 略

§2.4 * Riemann ζ 函数, Riemann 假设与千禧数学难题

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-z \ln k}$$

在区域 $\operatorname{Re} z > 1$ 上内闭一致收敛.

Riemann's hypothesis: $\zeta(z)$ 在带形区域 $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ 内的所有零点都位于直线 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 上.

§3 幂级数

§4 解析级数的泰勒展开

引言: 从复变函数的角度对泰勒展开有更深刻的理解

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots$$

§3 幂级数

§3.1 幂级数的收敛性

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (a \in \mathbb{C}, C_n \in \mathbb{C}) \quad (14)$$

显然, 每一项都是解析函数. 最简单的解析函数项级数. 根据 Weierstrass 定理, 只要把级数的收敛区域研究清楚, 和函数的解析性质也就清楚了.

Thm (Abel) 如果级数 (14) 在某点 $z_0 \neq a$ 收敛, 则

(1) 它在圆 $K: |z-a| < |z_0-a|$ 内绝对收敛;

(2) 它在闭圆 $\bar{K}_\rho: |z-a| \leq \rho < |z_0-a|$ 内一致收敛.

(即在圆 K 上内闭一致收敛)

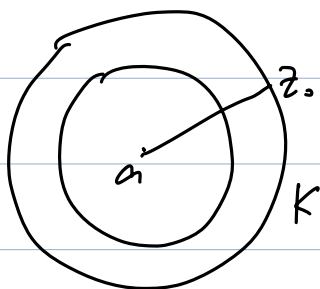
Pf 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z_0-a)^n$ 收敛, 故 $\exists M > 0$, s.t.

$$|C_n (z_0-a)^n| < M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$|C_n (z-a)^n| = |C_n (z_0-a)^n| \cdot \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n < M \underbrace{\left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n}_{\text{收敛}}$$

$$|z-a| < |z_0-a|$$

比较判别法. 左收敛. 即原级数在圆 K 上绝对收敛.



(2) 当 $|z-a| \leq \rho < |z_0-a|$, 有

$$|C_n(z-a)^n| < M \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n \leq M \underbrace{\left(\frac{\rho}{|z_0-a|} \right)^n}_{\text{与 } z \text{ 无关的正数}}$$

推论 $\exists R \geq 0$, s.t. $|z-a| < R$ 绝对收敛且内闭一致收敛
 $> R$ 处处发散

R : 收敛半径 $|z-a| = R$: 收敛圆周

收敛圆周上: 处处收敛, 处处发散等都有可能, 但一定有奇点

§3.3.2 收敛半径求法

正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| r^n$

* 柯西判别法

若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ 收敛;

----- $>$ ----- 发散.

$= 1$

无法判断

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} = l$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l} & 0 < l < \infty \\ 0 & l = \infty \\ \infty & l = 0 \end{cases}$$

* 达朗贝尔判别法

若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = l < 1$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ 收敛;

----- $>$ ----- 发散.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = l$$

定理 (收敛半径的 Cauchy 计算公式) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$, 则级数 (14) 的收敛半径为

$$R = \begin{cases} 1/l, & \text{当 } 0 < l < \infty; \\ 0, & \text{当 } l = \infty; \\ \infty, & \text{当 } l = 0. \end{cases} \quad (15)$$

实际上, 即使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 不存在, 只要 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$, 式 (15) 仍然成立 (相应的判别法也称为 Cauchy-Hadamard 判别法). 这里 $\overline{\lim}$ 表示上极限. 一个实数列的上极限就是它的所有收敛子列的极限中最大的一个 (虽然这不是上极限的原始定义).

例 1 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} [2 + (-1)^n] z^n$, $\sqrt[n]{|c_n|} = 2 + (-1)^n$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 不存在, 但考虑子列 $\{c_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$, 易得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 3$. 因此, 该级数的收敛半径为 $R = 1/3$, 即收敛圆为 $|z| < 1/3$.

例 2 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = 1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + \dots$, 当 $n = k^2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $c_n = 1$, 其它情况下 $c_n = 0$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 不存在, 但考虑子列 $\{c_{k^2}\}_{k=0}^{\infty}$, 易得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$. 因此, 该级数的收敛半径为 $R = 1$, 即收敛圆为 $|z| < 1$.

定理 (收敛半径的 d'Alembert 计算公式) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}/c_n| = l$, 则级数 (14) 的收敛半径由式 (15) 给出.

$$\begin{aligned} 1 + z + \dots + z^n + \dots &= \frac{1}{1-z} \\ z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots &= \\ \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{z^n}{(n-1)n} + \dots &= \end{aligned}$$

§3.3.3 和函数的解析性

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (a \in \mathbb{C}, c_n \in \mathbb{C})$$

定理 幂级数 (14) 在收敛圆 $K: |z-a| < R$ 上有如下性质:

- (1) 和函数 $f(z)$ 解析;
- (2) 可以逐项求导而收敛半径不变;
- (3) 可以逐项积分而收敛半径不变.

§3.4 解析函数的 Taylor 展开式

§3.4.1 Taylor 定理

幂级数 $\longleftrightarrow$ 解析函数

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

定理 (Taylor) 设函数 $f(z)$ 在圆 $K: |z - a| < R$ 内解析, 则在 K 内可以展开为幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (18)$$

$\downarrow$ 展开中心

其中

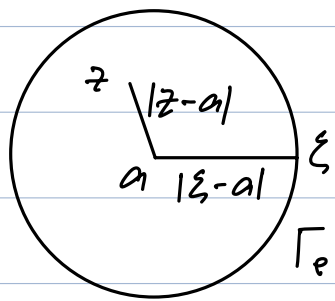
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad \Gamma_\rho: |\zeta - a| = \rho < R, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

且展开式是唯一的.

$\downarrow$
下一章有负幂次时只能用前者

实际计算利用已知的 Taylor 展开

pf



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$\downarrow$ 展开为以 a 为中心的幂级数

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} \quad |u| < 1 \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \end{aligned}$$

当 $\zeta \in \Gamma_\rho$,

$$\left| \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \right| = \left(\frac{|z-a|}{\rho} \right)^n,$$

右边与 ζ 无关, 且以此为通项的级数显然收敛, 故由 Weierstrass M-判别法, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} [(z-a)/(\zeta-a)]^n$ 在 Γ_ρ 上一致收敛. 又函数 $f(\zeta)/(\zeta-a)$ 在 Γ_ρ 上显然有界, 因此式 (20) 右边的级数在 Γ_ρ 上一致收敛, 因而可以

逐项积分, 得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right] (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \end{aligned}$$

唯一性

$$\begin{aligned} f(z) &= C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + C_3(z-a)^3 + \cdots \\ &= C'_0 + C'_1(z-a) + C'_2(z-a)^2 + C'_3(z-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

$$z=a \Rightarrow C'_0 = C_0$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= C_1 + 2C_2(z-a) + 3C_3(z-a)^2 + \cdots \\ &= C'_1 + 2C'_2(z-a) + 3C'_3(z-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$$z=a \Rightarrow C'_1 = C_1$$

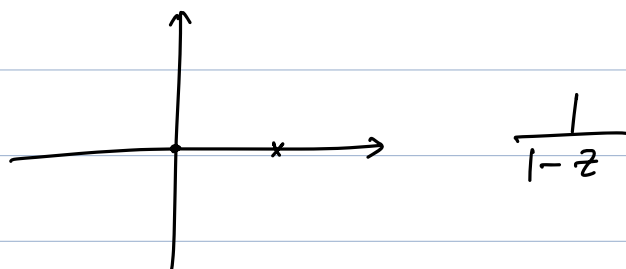
...

$$C'_n = C_n$$

§3.4.2 展开式的收敛半径

方法1: Cauchy / d'Alembert 计算公式

方法2:



以 a 点为中心将解析函数 $f(z)$ 展开为 Taylor 级数, 若 $f(z)$ 距离 a 点最近的奇点为 z_0 , 则展开式的收敛半径为 $R = |z_0 - a|$.

事实上, 以 a 点为中心作圆 K , 只要 $f(z)$ 在其中解析, 则 Taylor 展开式就在 K 内成立, 因此, 展开圆的圆周至少可以推至 z_0 处, 从而收敛半径 $R \geq |z_0 - a|$.

另一方面, 以 a 点为中心将 $f(z)$ 展开为 Taylor 级数, 假设其收敛半径 $R > |z_0 - a|$, 由于幂级数的和函数在收敛圆内解析, 故和函数在 z_0 解析, 这与 z_0 是 $f(z)$ 的奇点这一已知条件矛盾, 故 $R \leq |z_0 - a|$.

§3.4.3 初等单值函数的 Taylor 展开式

例: $f(z) = e^z$ 在 $a=0$

$$f^{(n)}(z) = e^z \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \#$$

收敛半径 $R = \infty$

例: $f(z) = \frac{1}{1-z}$ 在 $a=0$

例 3 求 $\cos z$ 和 $\sin z$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式.

解 与上面两题类似, 本题也可用系数公式计算展开系数而得到 Taylor 展开式. 这里我们采用另一种方法. 由例 1 的结果, 可有

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}, \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!},$$

于是

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad e^{iz} - e^{-iz} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

故所求 Taylor 展开式为

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (23)$$

作业提示:

$$\arctan x = \int (\dots) dx$$

§3.4.4 初等多值函数的 Taylor 展开式

对于多值函数, 首先要分出单值分支, 然后才能作 Taylor 展开.

例 4 求 $f(z) = \ln(1+z)$ 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式, 规定 $f(0)=0$.

解 $f(z) = \ln(1+z)$ 的支点为 -1 和 ∞ , 将 z 平面沿负实轴从 -1 到 ∞ 割破, 可以分出单值分支. 规定 $f(0)=0$ 即规定 $\arg(1+z)|_{z=0} = \arg[z - (-1)]|_{z=0} = 0$, 就确定了单值分支. (为了使 Taylor 级数的收敛圆尽量大, 割线不应该穿过单位圆 $|z| < 1$.) 按规定, $f(0)=0$, 故 $c_0=0$. 又

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-)^{n-1}(n-1)!, \quad c_n = \frac{(-)^{n-1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

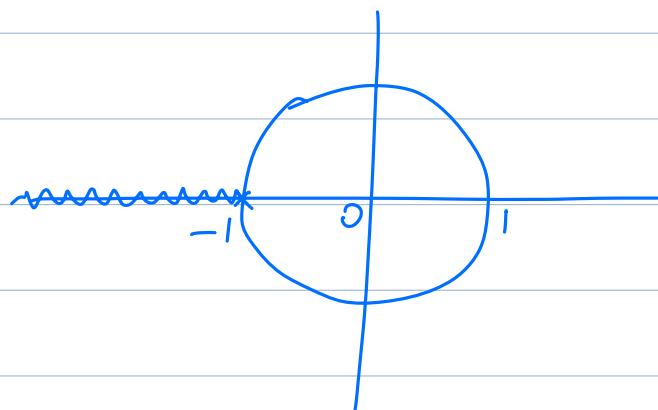
故所求 Taylor 展开式为

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n. \quad (24)$$

由于 $f(z)$ 距离展开中心 $a=0$ 最近的奇点为 $z_0 = -1$, 故展开式的收敛半径应为 $R=1$, 由 Taylor 系数计算收敛半径可得同样的结果.

如果规定 $\arg(1+z)|_{z=0} = \arg[z - (-1)]|_{z=0} = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则 $f(0) = i2k\pi$, $c_0 = i2k\pi$, 而其余系数不变, 故所求 Taylor 展开式为

$$\ln(1+z) = i2k\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n} z^n. \quad (25)$$



$$\ln(1+z) = \int \frac{1}{1+z} dz =$$

例 5 求 $f(z) = (1+z)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) 在 $a=0$ 处的 Taylor 展开式, 规定 $f(0)=1$.

解 $f(z) = (1+z)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+z)}$ 的支点为 -1 和 ∞ , 类似于上题, 将 z 平面沿负实轴从 -1 到 ∞ 割破, 可以分出单值分支. 规定 $f(0)=1$ 即规定 $\arg(1+z)|_{z=0} = \arg[z - (-1)]|_{z=0} = 0$, 就确定了单值分支. 按规定, $f(0)=1$, 故 $c_0=1$. 又

$$f'(z) = \frac{\alpha e^{\alpha \ln(1+z)}}{1+z} = \alpha(1+z)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+z} f(z),$$

继续求导得

$$f^{(n)}(z) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(1+z)^n} f(z),$$

故

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = C_\alpha^n, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

故所求 Taylor 展开式为

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n z^n, \quad (26)$$



§3.5 解析延拓的基本概念

定义 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 考虑一个包含 D 的更大的区域 G , 如果存在函数 $F(z)$ 在 G 内解析, 且在 D 内 $F(z) = f(z)$, 则称函数 $f(z)$ 可以解析开拓到 G 内, 并称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在 G 内的解析开拓.

如果这样定义的解析开拓存在的话, 可以证明它一定是唯一的.

例 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在区域 $D: |z| < 1$ 内解析, 而 $F(z) = 1/(1-z)$ 在区域 $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ (表示复平面去掉点 $z=1$) 内解析. 在 D 内 $F(z) = f(z)$, 故 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 G 内的解析开拓.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$\downarrow |z| < 1$

$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

$f(z)$ 和 $g(z)$ 在一条线上相等 $\Rightarrow$ 同一个函数 (有聚点的点列)

$$\sin x \Rightarrow \sin z$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$$

$|z| > 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

$\frac{1}{z} < 1$

环域 $0 < |z| < \infty$

Chap. 4 解析函数的罗朗展开与孤立奇点

Laurent, Taylor

Laurent 展开是研究解析函数奇点的重要工具.

§4.1 解析函数的 Laurent 展开

§4.1.1 双边幂级数

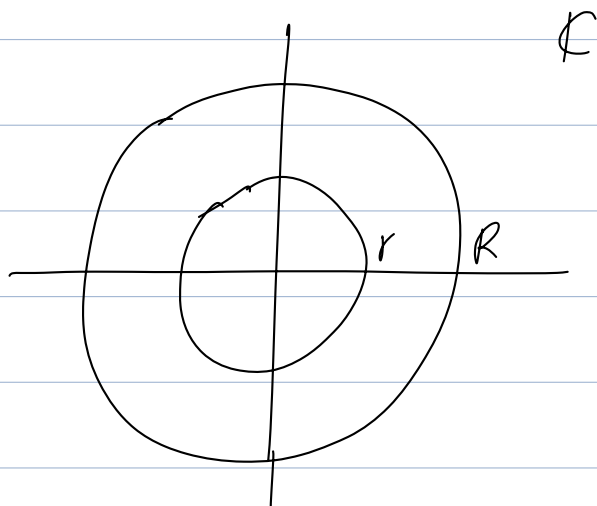
$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (3)$$

(1) ↓ (2)
两个级数

(1): 收敛半径为 R ($0 < R \leq \infty$): 在圆 $|z-a| < R$ 上绝对收敛且内闭一致收敛, 解析的和函数 $f_1(z)$

(2): $\xi = \frac{1}{z-a}$ $\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \xi^n \rightarrow$ 收敛半径为 $\frac{1}{r}$ ($0 \leq \frac{1}{r} < \infty$)

在圆 $|\xi| < \frac{1}{r}$ 上绝对收敛且内闭一致收敛, 解析的和函数 $f_2(z)$.
 $|z-a| > r$ ($0 \leq r < \infty$)



若 $r > R$, 则 (1)、(2) 没有公共收敛区域, 因而 (3) 发散.

例: $\sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ 处处发散

$|z| < \frac{1}{2} \checkmark \qquad \checkmark |z| > 1 \text{ 收敛}$

若 $r = R$, 则 (1), (2) 没有公共收敛区域, 但在圆周 $|z-a| = R = r$ 上可能存在收敛点.

例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 z^n}$ 在 $|z|=1$ 绝对收敛

$|z| < 1 \checkmark \qquad \checkmark |z| > 1 \text{ 收敛}$

若 $r < R$, 则 (1), (2) 有公共的收敛区域, 即环域

$$H: r < |z-a| < R \quad (0 \leq r < R \leq \infty)$$

Thm (Weierstrass) 双边幂级数 (3) 有如下性质:

- (1) 在收敛环 H 内绝对收敛于 $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, 且在闭环 $r < \rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2 < R$ 上一致收敛 (即在 H 上内闭一致收敛);
- (2) 和函数 $f(z)$ 在 H 内解析;
- (3) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$ 在 H 内可以逐项求导和逐项积分.

例: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$

$|z| < 2: \frac{2}{2-z} \qquad \checkmark \qquad \checkmark |z| > 1: \frac{1}{z-1}$

在环域 $H: 1 < |z| < 2$ 中绝对收敛于函数 $-\frac{z}{(z-1)(z-2)}$.

双边幂级数 $\xleftrightarrow{\text{收敛环}} \text{解析函数}$

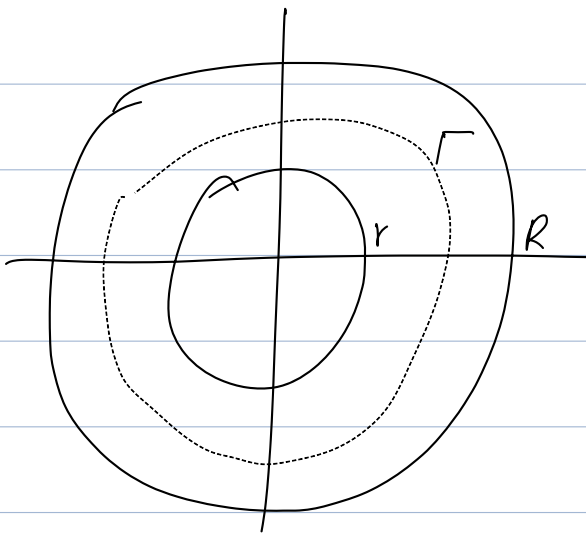
§4.1.2 解析函数的 Laurent 展开

Thm (Laurent) 设函数 $f(z)$ 在环域 $H: r < |z-a| < R$ ($0 \leq r < R < \infty$) 内解析, 则在 H 内可以展开为双边幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad \text{唯一.}$$

其中

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



* C_n 不能表示为 $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ (即使正幂项的系数)

因为 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leq r$ 上有奇点, 在 Γ 上的积分不满足 Cauchy 高阶导数公式的条件.

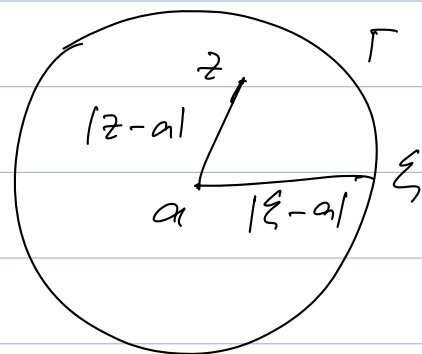
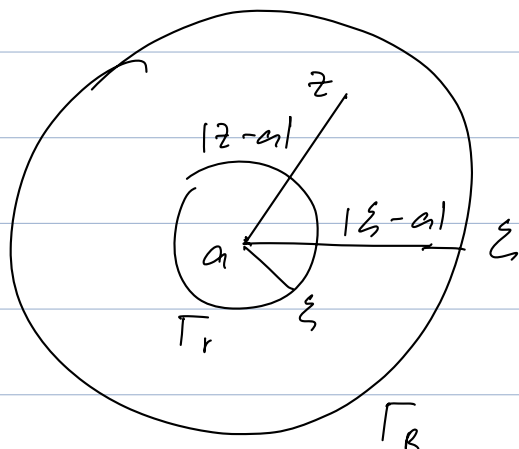
* 如果 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leq r$ 上确实没有奇点, 那么它在圆 $|z-a| < R$ 上解析, Laurent 级数退化为 Taylor 级数

* 展开式中有负幂次项. 因为 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leq r$ 上有奇点, 但 $f(z)$ 的奇点不一定在 a

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad 1 < |z| < \infty$$

↓ $z=0$ 不是奇点, 展开式在 $z=0$ 附近不成立.

pf



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

将 $\frac{1}{\xi - z}$ 展开为以 a 为中心的幂级数.

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{1}{1 - (z - a)/(\zeta - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n.$$

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} &= \frac{f(\zeta)}{(z - a) - (\zeta - a)} = \frac{f(\zeta)}{z - a} \frac{1}{1 - (\zeta - a)/(z - a)} = \frac{f(\zeta)}{z - a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-n+1}} (z - a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} (z - a)^n. \end{aligned}$$

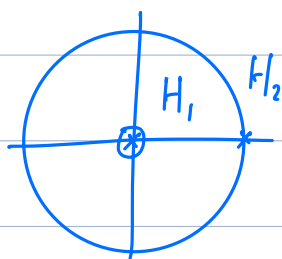
Laurent 展开唯一性 $\rightarrow$ 可以用任何方法来求展开式.

利用 Taylor 展开.

§4.1.3 展开式实例

例. 在 $a=0$ 处展开 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ 为 Laurent 级数.

解: $f(z)$ 有奇点 $z=0$ 和 $z=1$, 故分别在 $H_1: 0 < |z| < 1$ 和 $H_2: 1 < |z| < \infty$ 上解析.

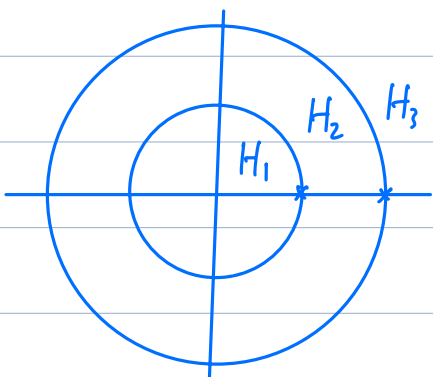


$$H_1: f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

$$H_2: f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

☆ 例: $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $a=0$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$



$$H_1: 0 < |z| < 1$$

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$H_2: 1 < |z| < 2$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

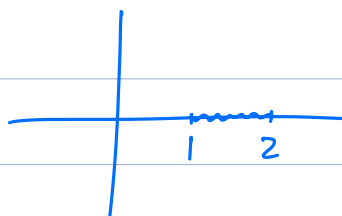
$$\frac{-1}{z-1} = -\frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

$$H_3: |z| > 2$$

$$\frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

(10)

$$H_4: f(z) = \ln \frac{z-2}{z-1}$$



$\cot z$

例 6 求函数 $f(t) = e^{(z/2)(t-1/t)}$ 在 $0 < |t| < +\infty$ 中的 Laurent 展开式, 其中 z 是参数.

解 用指数函数的 Taylor 展开式将 $e^{(z/2)t}$ 和 $e^{-(z/2)(1/t)}$ 分别展开为其宗量的 Taylor 级数. 因为两个级数均在 $0 < |t| < +\infty$ 中绝对收敛, 所以乘积级数也绝对收敛, 从而可以重新排列各项, 得到

$$f(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-)^l}{k!l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+l} t^{k-l} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(-)^l}{k!l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+l} t^{k-l} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{(-)^l}{k!l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+l} t^{k-l},$$

其中第一和式是 $k \geq l$ 部分, 第二和式是 $k < l$ 部分. 在第一和式中令 $k = l + m$, 在第二和式中令 $l = k + m$, 可以化为

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l}{l!(l+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+m} \right]}_{J_m(z)} t^m + \sum_{m=1}^{\infty} (-)^m \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m} \right]}_{J_m(z)} t^{-m}.$$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) t^m$$

§4.2 解析函数的零点与孤立奇点

§4.2.1 解析函数的零点

Def (m阶零点) 若函数 $f(z)$ 在 a 点解析, 且

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \text{ 而 } f^{(m)}(a) \neq 0,$$

则 a 称为 $f(z)$ 的 m 阶零点. 一阶零点亦称为单零点.

$$K: |z-a| < R \text{ 内解析, } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \quad C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

all $C_n = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. 若 f 不恒为零, m 总是存在.

例1: $f(z) = \sin z$

$$z_n = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad f'(z_n) = \cos z_n = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$$

例2: $f(z) = z - \sin z$

$z=0$ 为零点

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) \neq 0. \quad \underline{\text{三阶零点}}$$

例3: $f(z) = (z-a)^m, \quad m \in \mathbb{N}^+$

a : m 阶零点

例4: $f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \quad \varphi(z)$ 在 a 点解析且 $\varphi(a) \neq 0$

a : m 阶零点

多项式 $p_n(z)$ 的 m 重根 a , $p_n(z) = (z-a)^m Q_{n-m}(z)$

↳ m 阶零点

Thm (m 阶零点) 若函数 $f(z)$ 在 a 点的邻域 $K: |z-a| < R$ 内解析且不恒为零, 则 $f(z)$ 以 a 为 m 阶零点的充要条件是 $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 K 内解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$.

Thm (零点的孤立性) 若函数 $f(z)$ 在 a 点的邻域 $K: |z-a| < R$ 内解析且不恒为零, a 是 $f(z)$ 的零点, 则必存在邻域 $K': |z-a| < r$, 在其中只有 a 一个零点.

推论 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 在 D 内有点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $z_n \neq a$, $z_n \rightarrow a \in D$, $f(z_n) = 0$, 则在 D 内 $f(z) \equiv 0$.

Thm (解析函数的唯一性) 若函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 均在区域 D 内解析, 在 D 内有点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $z_n \neq a$, $z_n \rightarrow a \in D$, $f_1(z_n) = f_2(z_n)$, 则在 D 内必有 $f_1(z) = f_2(z)$.

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$$

有聚点的

解析函数在区域 D 内一个点列上的取值 $\Rightarrow f(z)$

聚点 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right), \quad a_0 = 1$
 $n \rightarrow \infty$

..... $\odot$

支点:



$m-1$ 阶支点 $\xi = \sqrt[m]{z-z_0}$, $f(z) = \sum a_k \xi^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k/m}$

§4.2.2 解析函数的孤立奇点及其分类

Def (孤立奇点) 如果函数 $f(z)$ 以 a 为奇点, 但在 a 的某去心邻域 $K \setminus \{a\} : 0 < |z-a| < R$ 中解析, 则称为 $f(z)$ 的孤立奇点 (isolated singularity).

a 是奇点, a 附近没有别的奇点

不是孤立奇点的例子:

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

$$z = \frac{1}{n\pi} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$z=0$ 是这些奇点的聚点

$$K \setminus \{a\} : 0 < |z-a| < R$$

Laurent series

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

正幂: 正则部分

负幂: 主要部分

负幂项的多少可以刻画奇性的大小

Def (孤立奇点的分类)

(1) 主要部分为零, a 称为 $f(z)$ 的可去奇点 (removable singularity)

$$(2) \quad \sim \dots \sum_{k=1}^m \frac{C_{-k}}{(z-a)^k}, \quad C_{-m} \neq 0,$$

a 称为 $f(z)$ 的 m 阶极点 (pole)

(3) $\sim \dots$ 有无穷多项, 本性奇点 (essential singularity)

§4.3 各种孤立奇点的判断

§4.3.1 可去奇点

例 $\frac{\sin z}{z}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 解析, Laurent series

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

主要部分为零, 故 $z=0$ 为可去奇点

在 $\mathbb{C}$ 解析

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Thm 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为可去奇点的充要条件是

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b \quad (b \neq \infty).$$

$\Leftrightarrow f(z)$ 在 a 的某去心邻域内有界.

§4.3.2 极点

例: $\frac{e^z}{z}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 解析, Laurent series:

$$\frac{e^z}{z} = \underbrace{\frac{1}{z}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

主要部分 1 项: $z=0$ 为单极点

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + C_0 + C_1(z-a) + \cdots$$

Thm 若 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列三命题等价:

(1) $f(z)$ 在 a 的主要部分为 $\sum_{k=1}^m \frac{C_{-k}}{(z-a)^k} \quad (C_m \neq 0) \quad m$ 阶极点

(2) $f(z)$ 在 a 的某去心邻域内可表为 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,

其中 $\varphi(z)$ 在 a 解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$.

(3) $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

例: $\frac{e^z}{z}$ $z=0$: 单极点

$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ $z=n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$): 单极点

$f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$ $z=0$: 3阶极点

推论 (极点的判定) 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为极点的充要条件是
是 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

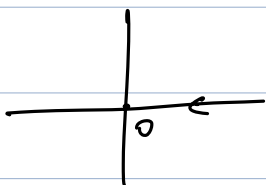
§4.3.3 本性奇点

Thm 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本性奇点的充要条件是
 $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ 不存在, 即不为有限值, 亦不为 ∞ .

↪ 极限与 $z \rightarrow a$ 的方式有关

例: $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 解析, Laurent series:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$



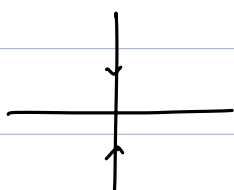
$$e^{\frac{1}{z}} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{z}} = \infty$$



$$e^{\frac{1}{z}} \rightarrow 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{z}} = 0$$



$$e^{\frac{1}{z}} \text{ 不确定}$$

$$\frac{1}{2\pi i}$$

$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在.

isolated singularity

• removable sing. $\xrightarrow{\frac{\sin z}{z}}$ $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b \quad (b \neq \infty)$

• pole $\xrightarrow{\frac{1}{z^2-1}}$ $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

• essential sing. $\xrightarrow{e^{\frac{1}{z}}}$ $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ 不确定

Roger Penrose
彭罗斯

singularity

§ 4.4 * 无穷远点

$t = \frac{1}{z}$ 将 $z = \infty$ 变为 $t = 0$

例: $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (a_n \neq 0)$

e^z

$\cot z$

$z = \infty$

n 阶极点

本性奇点

非孤立奇点

Chap. 5 留数定理及其应用

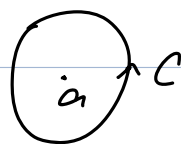
§5.1 留数定理

§5.1.1 留数的定义

$f(z)$ 在 $K: |z-a| < R$ 内解析.

$$\int_C f(z) dz = 0$$

如果 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 只在点 a 的某个邻域 $K \setminus \{a\}: 0 < |z-a| < R$ 内解析,



Def (留数) 如果函数 $f(z)$ 以 a 为孤立奇点, 即 $f(z)$ 在 $K \setminus \{a\}: 0 < |z-a| < R$ 中解析, 则积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz, \quad \Gamma_\rho: |z-a| = \rho \quad (0 < \rho < R)$$

称为 $f(z)$ 在点 a 处的留数 (residue), $\underset{z=a}{\text{Res}} f(z), \text{Res } f(a)$

Laurent 展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_\rho} C_n (z-a)^n dz = C_{-1}$$



$$\dots + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$$

§5.1.2 Cauchy 留数定理

Cauchy 留数定理 设函数 $f(z)$ 在围线或复围线 C 所围成的区域 D 中有孤立奇点 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 此外 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上解析, 则有

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k). \quad (3)$$

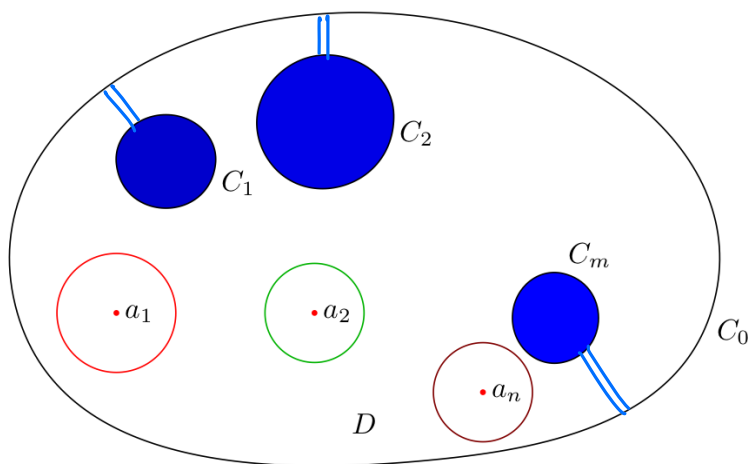


图 1: 区域 D 的边界为复围线 C , 其中有 n 个孤立奇点

证明 作 n 个小圆周 $\Gamma_k: |z - a_k| = \rho_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), 使各 Γ_k 及其内部全含于 D , 但各 Γ_k 互不相交也互不包含, 如图 1. 根据 Cauchy 积分定理和留数的定义, 有

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res} f(a_k) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k).$$

之前: $\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$

实际问题 $\rightarrow$ 围道积分 $\rightarrow$ 求留数 $\rightarrow$ 洛朗展开或求导等

§5.2 留数的算法

$$\operatorname{Res} f(z) = C_{-1}$$

只需提取 C_{-1}

C 内无奇点或只有可去奇点 $\Rightarrow 0$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$$

$$f(z) = \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$$

单极点的留数: $\text{Res } f(a) = [(z-a)f(z)] \Big|_{z \rightarrow a}$

n 阶极点的留数: $\text{Res } f(a) = [(z-a)^n f(z)]' \Big|_{z \rightarrow a}$

定理 (极点的留数) 设 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点, 则

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right\} \Big|_{z \rightarrow a}. \quad (4)$$

证明 由于 a 是 $f(z)$ 的 n 阶极点, 故在 a 的某去心邻域内有

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n},$$

其中 $\varphi(z)$ 在 a 点解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$. 于是

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{1}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(a),$$

最后一个等号用了高阶导数公式. 由于 $\varphi(z) = (z-a)^n f(z)$, 代入上式即得式 (4). 证毕.

定理 (单极点的留数, 第二公式) 设 a 是 $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ 的单极点, 即 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 均在 a 点解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, 则

$$\text{Res } f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} = \frac{A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots}{B_1 + 2B_2(z-a) + \dots} \quad (7)$$

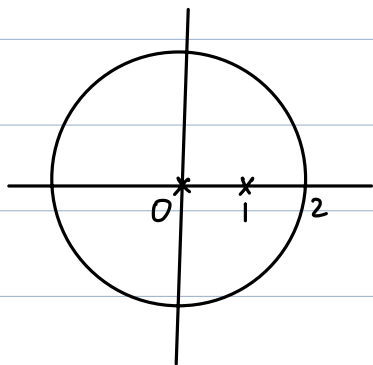
证明 按式 (5), 并利用 $\psi(a) = 0$ 等条件, 有

$$\begin{aligned} \text{Res } f(a) &= \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z) - \psi(a)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{[\psi(z) - \psi(a)]/(z-a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \end{aligned}$$

极点阶数较高时、本性奇点: 作洛朗展开求 C_{-1}

§5.3 用留数定理计算围道积分

例: $I = \int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2} dz$

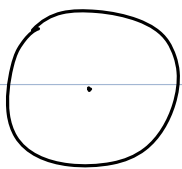


$z=0$: -1 阶极点 $\text{Res}f(0) = \frac{1}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 1$

$z=1$: -2 阶极点 $\text{Res}f(1) = \left(\frac{1}{z}\right)' \Big|_{z=1} = -1$

$$I = 2\pi i [\text{Res}f(0) + \text{Res}f(1)] = 0$$

例: $I = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$



$z=0$ 为 $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点 $\Rightarrow I = 0$

(Cauchy 积分公式 $I = 2\pi i \sin 0 = 0$)

例: $I = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ 在 $|z|=1$ 内部有一个本性奇点 $z=0$

$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow I = 2\pi i$

§5.4 * 无穷远点的留数

当 ∞ 点是函数 $f(z)$ 的孤立奇点时, 可以定义其留数如下.

定义 (∞ 的留数) 如果函数 $f(z)$ 以 ∞ 为孤立奇点, 即 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域 $r < |z| < \infty$ 中解析 (r 为正数), 则积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z) dz, \quad \Gamma: |z| = \rho \quad (r < \rho < \infty) \quad (8)$$

称为 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数, 记作 $\text{Res}_{z=\infty} f(z)$, 或简记为 $\text{Res } f(\infty)$, 或 $\text{Res}(f, \infty)$.

注 以上积分取 Γ 的负方向, 这正是包围 ∞ 点的正方向. 显然, 只要 $r < \rho < \infty$, 上述积分的数值与 ρ 的大小无关.

设 $f(z)$ 在 $r < |z| < \infty$ 内的 Laurent 展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

则

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

令 $n = -1$, 得

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

与式 (8) 比较, 即得

$$\text{Res } f(\infty) = -c_{-1}.$$

∞ 的留数非零也可能不是奇点

如果函数 $f(z)$ 在 z 平面上只有有限个孤立奇点, 那么 ∞ 点当然也是孤立奇点. 这时候, 它们的留数满足一个简单的关系, 这就是下面的

定理 (总留数) 设函数 $f(z)$ 在扩充 z 平面上只有有限个孤立奇点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 ∞ , 则 $f(z)$ 在各点的留数之和为 0, 即

$$\sum_{k=1}^n \text{Res } f(a_k) + \text{Res } f(\infty) = 0. \quad (10)$$

例: $f(z) = \frac{1}{z}$

$\text{Res } f(0) = 1$

$\text{Res } f(\infty) = -1$

例 计算积分 $I = \int_{|z|=2} \frac{z^{15}}{(z^4+1)^4} dz$.

解 本题的被积函数 $f(z) = z^{15}/(z^4+1)^4$ 在圆周 $|z| = 2$ 的内部有四个极点: $z_k = e^{i\pi/4 + ik\pi/2}$, $k = 0, 1, 2, 3$, 它们都是四阶极点, 而且都对积分有贡献, 所以按照式 (3) 和 (4) 来计算显然是很麻烦的. 注意到被积函数在 z 平面上没有其它有限的奇点, 则可以应用上述定理而得到

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^3 \text{Res } f(z_k) = -2\pi i \text{Res } f(\infty).$$

这样一来, 我们就只需要计算 ∞ 的留数. 在 ∞ 的邻域内, 即当 $|z|$ 很大时, 有

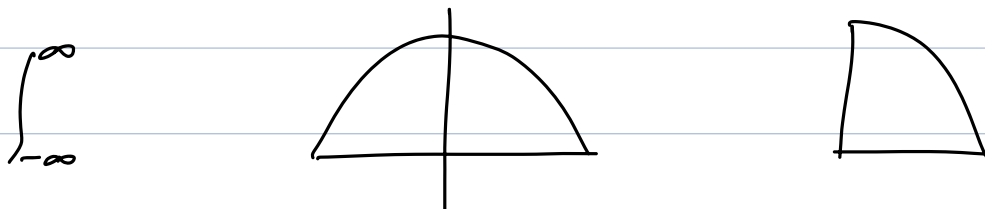
$$f(z) = \frac{z^{15}}{(z^4+1)^4} = \frac{1}{z} \frac{1}{(1+1/z^4)^4} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z^4}\right)^{-4} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{4}{z^4} + \dots\right),$$

可见, $c_{-1} = 1$, $\text{Res } f(\infty) = -1$, 而 $I = 2\pi i$. 这样计算的工作量就大大减少了.

§5.5 实积分 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

实变函数的定积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 围道积分

$$z = e^{i\theta}$$

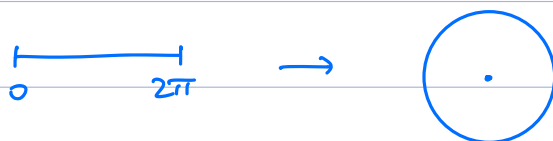


本节讨论的积分具有标题给出的形式，其中 R 是两个自变量的有理函数。对于这类积分，关键是作变量置换

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = e^{i\theta} i d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

这一变换将 θ 的积分区间 $[0, 2\pi]$ 映射为 z 平面上的单位圆周 $|z| = 1$ ，因此，定积分就变成了围线积分。注意到指数函数和三角函数之间的关系，易得

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (12)$$



例: $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta}$, 其中 $-1 < a < 1$ $\rightarrow$ 围道中的奇点

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1+a(z+z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2+2z+a}.$$

上式右边已是围线积分，被积函数为有理分式，其奇点就是分母的根，满足 $az^2+2z+a=0$ ，具体来说是

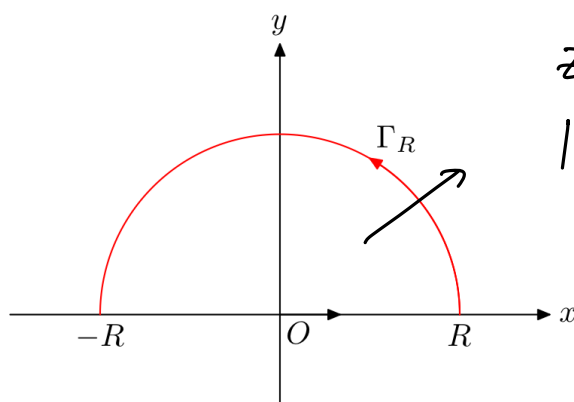
$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}, \quad z_2 = \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

显然 $|z_2| > 1$ 。由根与系数的关系，有 $z_1 z_2 = 1$ ，故 $|z_1| |z_2| = 1$ ，从而 $|z_1| < 1$ 。于是只有 z_1 在单位圆内，即只有 z_1 的留数对积分有贡献，根据式 (7)，

$$\text{Res}\left(\frac{1}{az^2+2z+a}, z_1\right) = \frac{1}{2az_1+2} = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}},$$

单极点, 求导

§6 实积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$



$z > R_0$ 时
 $|zf(z)| < \varepsilon$

定理 设函数 $f(z)$ 在上半平面上有有限个孤立奇点，此外它在上半平面和实轴上解析，且当 $z \rightarrow \infty$ 时， $zf(z) \Rightarrow 0$ ，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k). \quad (13)$$

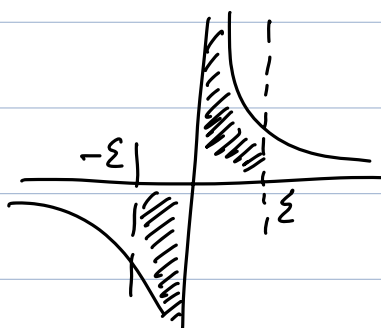
注 ① $z \rightarrow \infty$ 时 $zf(z) \Rightarrow 0$ (一致趋于 0) 的大意是 $zf(z) \rightarrow 0$ 的速度与 z 的辐角无关 (在指定的辐角范围内，这里是 $[0, \pi]$)。精确地说，就是 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R_0 > 0$ 与 θ 无关，当 $|z| > R_0$ 时，就有 $|zf(z)| < \varepsilon$ 。② 求和号下面的 $\text{Im } a_k > 0$ 表示求和只对上半平面的各孤立奇点进行。③ 如果 $f(x)$ 是有理分式，则易知分母的多项式次数应该至少比分子的次数大 2。④ 这一公式应该在理解和反复使用的基础上熟练掌握。

主值 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$

一般值 $\lim_{\substack{R_1 \rightarrow -\infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx$

$\infty + 1$ 也是 ∞

广义积分的主值



$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx$$

证

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} |f(z)| |dz| = \int_{\Gamma_R} |f(z)| R d\theta$$

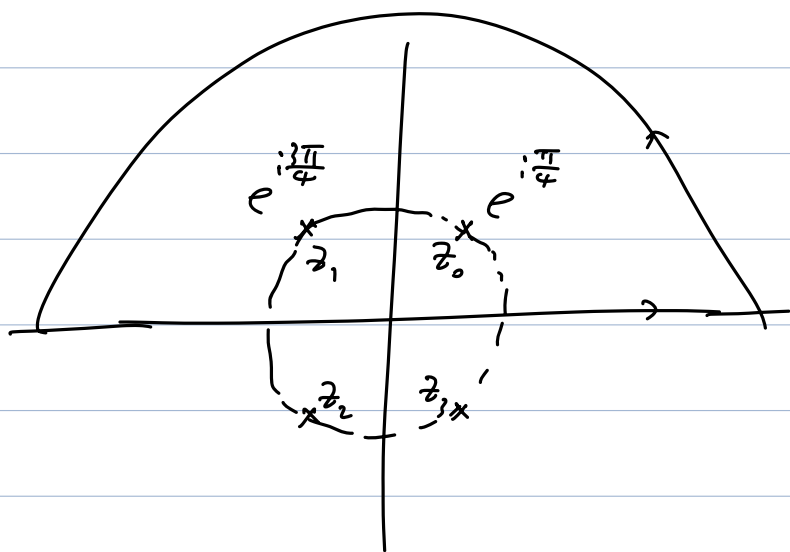
$$= \int_{\Gamma_R} |zf(z)| d\theta < \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\pi d\theta = \varepsilon$$

$$\text{即 } \int_{\Gamma_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{例 1: } I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^q + 1}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1.5} + 1}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^q + 1}$$



$$\text{Recall: } f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$$\text{Res } f(z_k) = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}$$

$$\text{Res } f(z_k) = \frac{1}{q z_k^3} = \frac{z_k}{q z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$$

$$\text{Res } f(z_0) + \text{Res } f(z_1) = -\frac{1}{4} (z_0 + z_1)$$

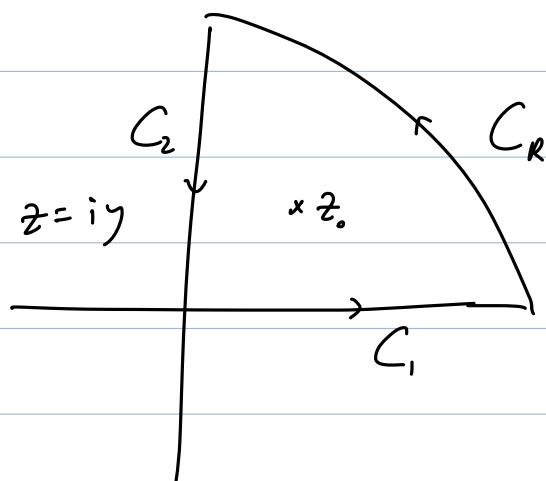
$$= -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \{ \text{Res} f(z_0) + \text{Res} f(z_1) \}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} - 2\sqrt{2(17 + \sqrt{17})}} \right)$$

另一种解法



优点：围线内只有一个极点

$$z = iy$$

$$I + \underbrace{\int_R \frac{idy}{(iy)^4 + 1}}_{\downarrow} = -\frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$-i \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^4 + 1}$$

$$(1-i)I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi(1-i)}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = ?$$

如果 $f(z)$ 在实轴上有若干一阶极点, 此外满足上述定理的条件, 则公式 (13) 可推广为

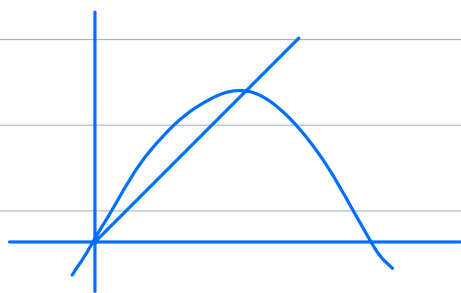
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[\sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res } f(a_k) + \frac{1}{2} \sum_{\text{Im } b_k = 0} \text{Res } f(b_k) \right]. \quad (15)$$

§5.7 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx} dx$

Jordan 引理 设函数 $f(z)$ 在半圆 $\Gamma_R: z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$ 上连续, 且当 $R \rightarrow \infty$ 时, $f(z) \Rightarrow 0$, 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{imz} dz = 0, \quad (m > 0). \quad (16)$$

在给出该引理的严格证明之前, 先作一点直观的说明. 在上一节计算积分类型 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 时, 曾经用到 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$ 的结论, 其条件是当 $R \rightarrow \infty$ 时, $zf(z) \Rightarrow 0$ (虽然没有当作引理列出来). 这里我们看到, Jordan 引理所要求的条件较弱, 主要原因是被积函数中含有因子 $e^{imz} = e^{-mR \sin \theta} e^{imR \cos \theta}$, 其中第一因子随着 R 的增大迅速衰减 ($\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 两点例外, 但对结论没有影响), 这弥补了 $f(z)$ 下降较慢的不足, 第二因子在半径很大的圆弧上是 θ 的快速振荡函数, 也有助于积分的收敛, 但第一因子起主要作用. 由上面的分析容易看出 $m > 0$ 这个条件是必不可少的.



$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$$

定理 设函数 $f(z)$ 在上半平面上有有限个孤立奇点, 此外它在上半平面和实轴上解析, 且当 $z \rightarrow \infty$ 时, $f(z) \Rightarrow 0$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res}[f(z) e^{imz}, a_k], \quad m > 0. \quad (17)$$

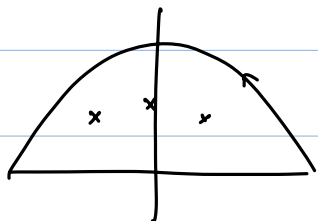
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$zf(z) \Rightarrow 0$$

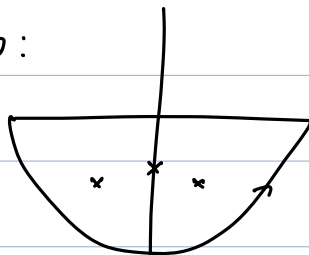
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx} dx$$

$$f(z) \Rightarrow 0$$

$m > 0$:



$m < 0$:



$$m < 0: \quad x' = -x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx} dx = \int_{\infty}^{-\infty} f(-x') e^{-imx'} d(-x')$$

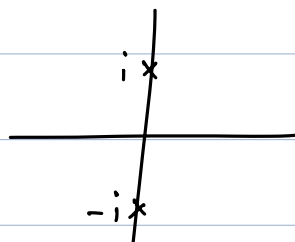
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x') e^{-imx'} dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{i|m|x} dx$$

例: $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx, \quad \text{其中 } m > 0$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx + i \sin mx}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x^2+1} dx$$

$$\text{取 } f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$



$$\text{Res}[f(z) e^{imz}, i] = \left. \frac{e^{imz}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{e^{-m}}{2i}$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \text{Res}[f(z) e^{imz}, i] = \frac{\pi}{2} e^{-m}$$

例: $I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx$, 其中 $a > 0$, $m \in \mathbb{R}$ 且 $m \neq 0$

解 先考虑 $m > 0$,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{imx}}{x^2 + a^2} dx,$$

取

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + a^2},$$

$f(z)$ 满足定理的条件, 在上半平面只有一个一阶极点 $z = ai$, 易得

$$\operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, ai] = \left. \frac{ze^{imz}}{2z} \right|_{z=ai} = \frac{e^{-ma}}{2},$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{imx}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, ai] = 2\pi i \frac{e^{-ma}}{2} = \pi i e^{-ma},$$

而

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-ma}.$$

当 $m < 0$ 时, 直接利用以上 $m > 0$ 时的结果, 可得

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx = - \int_0^{\infty} \frac{x \sin |m|x}{x^2 + a^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^{-|m|a} = -\frac{\pi}{2} e^{ma}.$$

例 3 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx$, 其中 $m \in \mathbb{R}$ 且 $m \neq 0$.

解 先考虑 $m > 0$,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx,$$

取

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

它满足公式 (18) 的条件, 在上半平面没有奇点, 在实轴上有一个一阶极点 $z = 0$. 易得

$$\operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, 0] = e^{imz}|_{z=0} = 1,$$

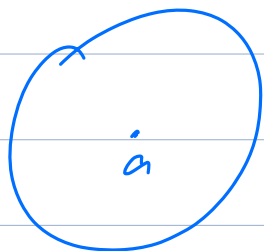
故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, 0] = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \pi i,$$

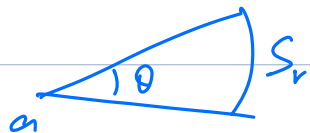
$$I = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(x) \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{imx} dx & F(x) \text{ 偶} \\ \int_0^{\infty} G(x) \sin mx dx &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{imx} dx & G(x) \text{ 奇} \end{aligned}$$

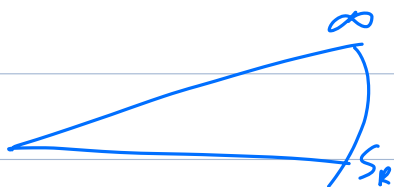
大圆弧引理和小圆弧引理



$$\oint \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$



$$\int_{S_r} \frac{dz}{z-a} = i \Delta \theta$$



$$z f(z) \Rightarrow \lambda$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) dz = i \lambda \Delta \theta$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$



$$(z-a) f(z) \Rightarrow \lambda$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} f(z) dz = i \lambda \Delta \theta$$

$$\oint f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} f(z) dz = \Delta \theta \cdot i a_{-1}$$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \dots$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) dz = \Delta \theta \cdot i a_{-1}$$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

§5.8 * 含一般幂函数与有理分式的无穷积分

定理一 设函数 $f(z)$ 在复平面上除有限个奇点外单值解析; $f(z)$ 在正实轴上只有单极点; 当 $z \rightarrow 0$, $z^\alpha f(z) \Rightarrow 0$; 当 $z \rightarrow \infty$, $z^\alpha f(z) \Rightarrow 0$; 则有

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx = -\pi \frac{e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \sum_{0 < \arg a_k < 2\pi} \text{Res} [z^{\alpha-1} f(z), a_k] - \pi \cot \pi\alpha \sum_{b_k > 0} \text{Res} [z^{\alpha-1} f(z), b_k], \quad (21)$$

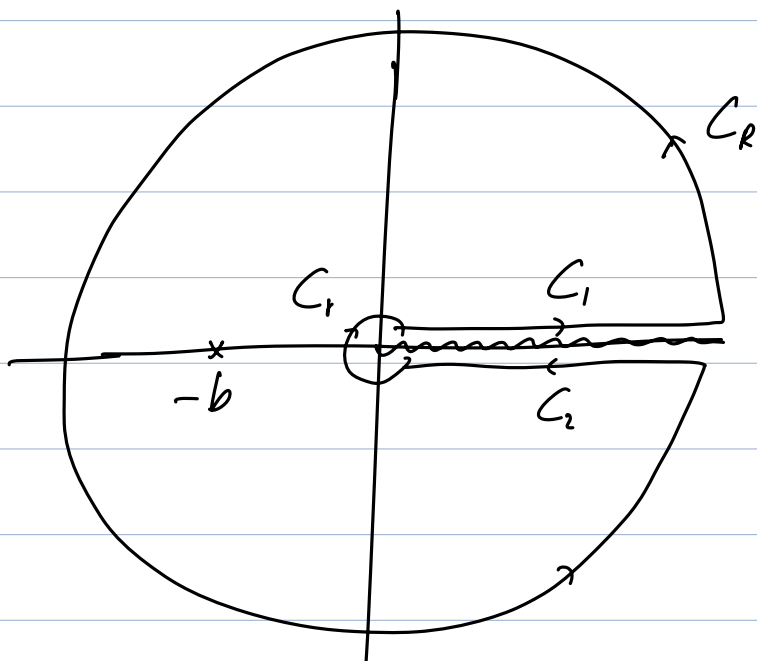
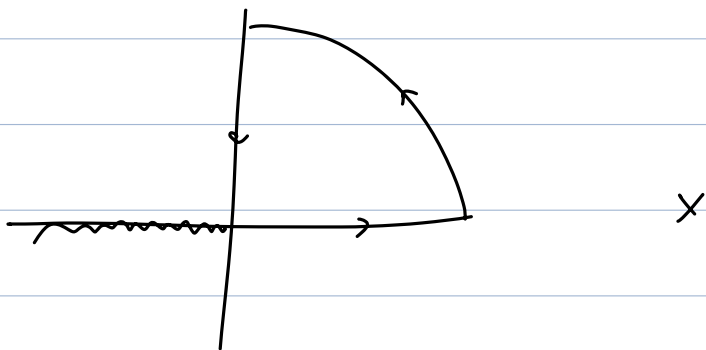
其中第一项对 $f(z)$ 在正实轴以外的奇点求和, 第二项对其在正实轴上的单极点求和.

定理二 设函数 $f(z)$ 在复平面上除有限个奇点外单值解析; $f(-z) = f(z)$; $f(z)$ 在实轴上只有单极点; 当 $z \rightarrow 0$, $z^\alpha f(z) \Rightarrow 0$; 当 $z \rightarrow \infty$, $z^\alpha f(z) \Rightarrow 0$; 则有

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx = -\pi \frac{e^{-i\pi\alpha/2}}{\sin(\pi\alpha/2)} \sum_{\text{upper}} \text{Res} [z^{\alpha-1} f(z)] - \pi \cot \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\text{positive}} \text{Res} [z^{\alpha-1} f(z)], \quad (23)$$

其中第一项对 $f(z)$ 在上半平面的奇点求和, 第二项对其在正实轴上的单极点求和.

例 1:
$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx \quad (b>0, 0 < \text{Re} \alpha < 1)$$



$$\oint = \int_{C_1} + \int_{C_p} + \int_{C_2} + \int_{C_r}$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 0 0 0 0

$$2\pi i \cdot (-b)^{\alpha-1}$$

$$= 2\pi i (e^{i\pi} b)^{\alpha-1}$$

$$= -2\pi i b^{\alpha-1} e^{i\pi\alpha}$$

$$\int_{C_2} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz$$

$$z = x \cdot e^{i \cdot 2\pi}$$

$$= - \int_0^\infty \frac{(x e^{2\pi i})^{\alpha-1}}{x+b} dx$$

$$= -e^{2\pi i \alpha} I$$

$$\int_r^R$$

$$0 + 0 + (1 - e^{2\pi i \alpha}) I = -2\pi i b^{\alpha-1} e^{i\pi\alpha}$$

$$\Rightarrow I = -2\pi i \frac{b^{\alpha-1} e^{i\pi\alpha}}{e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} b^{\alpha-1}$$

例2:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{b-x} dx$$

